Sammlung
trigonometrischer Aufgaben

aus der

reinen und angewandten Mathematik.

Mit Auflösungen und vielen Zahlenbeispielen

herausgegeben

von

Dr. August Wiegand,

Oberlehrer der Mathematik und erstem Collegen an der Realschule zu Halle,
Mitgliede des naturwissenschaftlichen Vereins daselbst.

Mit 61 Figuren.

Leipzig, 1852.

Druck und Verlag von Philipp Reclam jun.

DEN HERREN

THOMAS GASKIN

UND

WILLIAM WALTON

IN

CAMBRIDGE

ALS EIN SCHWACHES ZEICHEN SEINER HOCHACHTUNG UND DANKBARKEIT DARGEBRACHT

VOM

VERFASSER.

Vorwort.

Eine der wichtigsten, zugleich aber auch eine der schwierigsten Aufgaben für den Lehrer der Mathematik ist die Auffindung von passendem Material für die Selbstübung seiner Schüler. So reich auch unsere mathematische Literatur an Aufgabensammlungen ist, so ist doch diese Schwierigkeit noch keineswegs als gehoben zu betrachten. An eine für Schüler bestimmte Aufgabe muß man die Forderung stellen, daß sie dem Schwächeren ebenso, wie dem Fähigeren, Jedem nach seinen Kenntnissen, Gelegenheit gebe Etwas zu leisten, daß sie nicht die Aufspürung eines versteckt liegenden Kunstgriffs erfordere, sondern sich so an das in der Schule dagewesene anschließe, daß sie nur als dessen Ausläufer erscheine. Das Problem muß ferner dem Stoffe nach so gewählt sein, daß es sich das Interesse des Schülers von selbst erzwingt, daß es seine Wißbegierde spannt, daß es ihn auf Schritt und Tritt verfolgt, daß es ihn treibt und drängt, bis er's gefunden und mit dem Triumphe eines Archimedes sein „εὕρηκα“ ausrufen kann. — Doch nicht genug, die Aufgabe muß sich dem Schüler ankündigen, als die Thür zu einem großen Gebäude, das ihn zum Durchwandern seiner verschiedenen Räume einladet, der Schüler muß erkennen und fühlen, er

habe mit dem gewonnenen Resultate den Fuß auf ein bisher ihm fremdes Gebiet gesetzt, dessen Fluren, Thäler und Wälder zu durchstreifen, dessen Berge zu ersteigen, dessen Erzeugnisse kennen zu lernen er mit der brennenden Sehnsucht des Fremdlings erfüllt wird, der zuerst den Fuß auf ein neuentdecktes Eiland setzt. — Bei solchen Anforderungen an Schüleraufgaben ist freilich die Kraft des Einzelnen ohnmächtig und nur von der Zusammenwirkung Vieler Etwas zu hoffen. Als ein schöner Versuch in diesem Sinne sind die **„Geometrischen Ausläufer** vom **Schulrath Dr. Müller** in **Wiesbaden. Halle, 1846.“** zu betrachten, die, wie mich bedünken will, nicht die Beachtung gefunden haben, die sie in so hohem Grade verdienen. Dem Beispiele Müllers folgend habe auch ich versucht, ähnliche neue Gebiete zu eröffnen in den Schriften:

1) Sätze über harmonische Verhältnisse und deren Anwendung auf die Lösung geometrischer Aufgaben. Halle, 1847. (Die **zweite Auflage** erschien im Jahre 1848 unter dem Titel:)

Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit Rücksicht auf harmonische Theilung.

2) Trigonaltriaden in arithmetischer und harmonischer Progression. Halle, 1850.

Daneben habe ich Gelegenheit genommen in den Programmen der hiesigen Realschule auf solche Probleme hinzuweisen, die ich in meiner langen Lehrerthätigkeit als besonders anregend erkannt habe. Meine dringenden Aufforderungen an meine Fachgenossen aber, die Programme zu

ähnlichen Mittheilungen zu benutzen, sind leider! nur wenig beachtet worden und drängt es mich deshalb auch diese Gelegenheit zu benutzen, um diese Bitte an die Schulmathematiker zu erneuern.*)

Was nun das Uebungsmaterial für die Trigonometrie betrifft, so ist unsere Literatur an Schriften, die darin etwas Gutes liefern, ganz besonders arm und bot sich mir deshalb auch bei der Bearbeitung vorliegender Schrift wenig meinem Zwecke Dienendes, zur Benutzung dar, so wenig ich das Verdienstliche der Schriften von Seydewitz, Lauteschläger und Anderen verkennen mag. Reicher flossen mir die Quellen in der englischen Literatur und haben mir die Schriften:

1) Solutions of the trigonometrical problems, proposed at St. John's College, Cambridge, from 1829 to 1846. By Thomas Gaskin.

2) Problems and theorems in plane trigonometry. By the Rev. David Hewitt.

3) A Collection of problems and examples adapted to the elementary course of mathematics. By the Rev. Harvey Goodwin.

4) Cambridge problems: being a collection of

---

*) Als treffliche und nachahmungswürdige Versuche in diesem Sinne aus früherer Zeit sind zu betrachten die Programmabhandlungen von **Deinhardt: Die Construction trigonometrischer Formeln** rc. (Gymnasium in Wittenberg), von **Kunze: Ueber einige theils bekannte, theils neue Sätze vom Dreieck und Viereck** (Gymnasium in Weimar), und von **Boner: Eine Reihe trigonometrischer Aufgaben über das Dreieck mit äquidifferenten Seiten** (Gymnasium in Münster).

the printed questions proposed to the Candidates for the degree of Bachelor of arts at the general examinations the year 1801 to the year 1820 inclusively.

5) The Mathematician. Edited by William Rutherford and Stephen Fenwick.

eine Menge der interessantesten Aufgaben zur Benutzung dargeboten. Hierbei muß ich bemerken, daß die bei Weitem größte Zahl der mitgetheilten Probleme die Schulprobe bestanden hat und von meinen Schülern gelöst worden ist und kann ich mich deshalb um so mehr der Hoffnung hingeben, meinen Collegen ein brauchbares Hülfsmittel für den Unterricht hierdurch übergeben zu haben.

Wie weit das Buch von dem Ideale, was mir vorgeschwebt hat, entfernt geblieben ist, vermag ich am Besten zu ermessen, und ich werde mich deshalb hinlänglich belohnt fühlen, wenn man demselben anmerken sollte, daß es mit Lust und Liebe und dem Streben, einen Schritt zum Besseren zu thun, geschrieben ist.

Für die Hand des Schülers habe ich einen Abdruck der Aufgaben ohne die Lösungen besorgen lassen und ist derselbe in demselben Verlage erschienen.

Wiegand.

Inhalt.

Seite

Neuntes Kapitel.

Zehntes Kapitel.

Elftes Kapitel.

Trigonometrische Fundamentalsätze.

I. Goniometrie.

$$(1)\quad \begin{cases} \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \\ \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \\ \operatorname{tg}\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \\ \cot\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \end{cases}$$

$$(2)\quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\alpha}}; \\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} \\ \quad = \sqrt{1 + \cot^2\alpha}. \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \\ \quad = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1 + \cot^2\alpha}}. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \\ \sec\alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \end{cases}$$

$$(7)\begin{cases}\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,\\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha,\\ \sec(-\alpha) = \sec\alpha,\\ \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.\end{cases}$$

$$(8)\begin{cases}\sin 0 = \sin 2n\pi = 0,\\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2},\\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,\\ \sin\pi = 0,\\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1.\end{cases}$$

$$(9)\begin{cases}\cos 0 = \cos 2n\pi = 1,\\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2},\\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\\ \cos\pi = -1,\\ \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\\ \sec\frac{\pi}{4} = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.\end{cases}$$

$$(10)\begin{cases}\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} 2n\pi = 0,\\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,\\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty,\\ \operatorname{tg}\pi = 0,\\ \operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} = -\infty.\end{cases}$$

$$(11)\begin{cases}\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha),\\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha\\ \operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{cosec}(\pi - \alpha).\end{cases}$$

$$(12)\begin{cases}\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha),\\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha,\\ \sec\alpha = -\sec(\pi - \alpha).\end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = - \operatorname{tg} (\pi - \alpha) \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = - \cot \alpha, \\ \cot \alpha = - \cot (\pi - \alpha), \\ \cot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = - \cot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = - \operatorname{tg} \alpha. \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \sin (\pi + \alpha) = - \sin \alpha, \\ \cos (\pi + \alpha) = - \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} (\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha, \\ \cot (\pi + \alpha) = \cot \alpha. \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \sin (2\pi - \alpha) = - \sin \alpha, \\ \cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha, \\ \sin (2n\pi + \alpha) = \sin \alpha, \\ \cos (2n\pi + \alpha) = \cos \alpha. \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{cosec} 30^0 = \sec 60^0 = 2. \end{cases}$$

$$(17)\quad \sin 60^0 = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(18)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} 30^0 = \cot 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{tg} 60^0 = \cot 30^0 = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \sin 15^0 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \cos 75^0, \\ \cos 15^0 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \sin 75^0, \\ \operatorname{tg} 15^0 = 2 - \sqrt{3} = \cot 75^0, \\ \cot 15^0 = 2 + \sqrt{3} = \operatorname{tg} 75^0. \\ \operatorname{tg} 22^0\ 30' = \sqrt{2} - 1 = \cot 67^0\ 30', \\ \cot 22^0\ 30' = \sqrt{2} + 1 = \operatorname{tg} 67^0\ 30'. \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \cos 72^0 \\ \sin 54^0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \cos 36^0, \\ \sin 36^0 = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54^0, \\ \cos 18^0 = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72^0. \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta, \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta. \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \end{cases}$$

$$(23)\quad \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta,$$

$$(24)\quad \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \sin\beta.$$

$$(25)\quad \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta = 2 \cos\alpha \cos\beta.$$

$$(26)\quad \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin\alpha \sin\beta.$$

$$(27)\quad \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

$$(28)\quad \sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha.$$

$$(29)\quad \sin 4\alpha = (4 \sin\alpha - 8 \sin^3\alpha) \cos\alpha.$$

$$(30)\quad \sin 5\alpha = 5 \sin\alpha - 20 \sin^3\alpha + 16 \sin^5\alpha.$$

$$(31)\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

$$(32)\quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha.$$

$$(33)\quad \cos 4\alpha = 8 \cos^4\alpha - 8 \cos^2\alpha + 1.$$

$$(34)\quad \cos 5\alpha = 16 \cos^5\alpha - 20 \cos^3\alpha + 5 \cos\alpha.$$

$$(35)\quad \sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$(36)\quad \sin\alpha - \sin\beta = 2 \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$(37)\quad \cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$(38)\quad \cos\beta - \cos\alpha = 2 \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$(39)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}, \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}, \\ \cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}, \\ \cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}. \end{cases}$$

$$(40)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \\ \operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}^3\alpha - 3 \operatorname{tg}\alpha}{3 \operatorname{tg}^2\alpha - 1} \end{cases}$$

(41) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha.$

(42) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha.$

(43) $\sin \alpha + \cos \alpha = \cos(\alpha - 45)\sqrt{2} = \sin(45 + \alpha)\sqrt{2}.$

(44) $\sin \alpha - \cos \alpha = \sin(\alpha - 45)\sqrt{2} = -\cos(45 + \alpha)\sqrt{2}.$

(45) $$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \\ \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \end{cases}$$

(46) $$\begin{cases} \cot \alpha + \cot \beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \\ \cot \beta - \cot \alpha = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}. \end{cases}$$

(47) $\operatorname{tg} \alpha + \cot \alpha = 2 \operatorname{cosec} 2\alpha.$

(48) $\cot \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \cot 2\alpha.$

(49) $$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1. \end{cases}$$

(50) $$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{\alpha - \beta}{2}}.$$

(51) $$\begin{cases} \dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \dfrac{\alpha + \beta}{2}. \\ \dfrac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \dfrac{\alpha - \beta}{2} \end{cases}$$

(52) $$\begin{cases} \dfrac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right), \\ \dfrac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cot\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right). \end{cases}$$

(53) $$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \beta$$

(54) $$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

II. Sätze vom Dreieck.

(55) $a : b = \sin A : \sin B.$

(56) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$

(57)
$$\begin{cases} \triangle = \frac{ab}{2} \sin C = \frac{ac}{2} \sin B = \frac{bc}{2} \sin A; \\ \triangle = \sqrt{S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}, \\ \text{wo } S = \frac{a+b+c}{2} \text{ gesetzt ist;} \\ \triangle = \frac{abc}{4R}, \text{ wo } R \text{ der Radius des umschriebenen Kreises ist.} \end{cases}$$

(58) $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2\,bc}$$

(59) $$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{S\,(S-a)}{bc}}.$$

(60) $$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)\,(S-c)}{bc}}.$$

(61) $$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}.$$

(62) $$a + b : a - b = \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} : \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}.$$

(63)
$$\begin{cases} a = 2R \sin A, \\ b = 2R \sin B, \\ c = 2R \sin C. \end{cases}$$

III. Reihen und Moivre's Theorem.

(64) $$\sin x = x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \text{etc.}$$

(65) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \text{etc.}$$

(66)
$$\begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{etc.} \\ \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \text{etc.} \end{cases}$$

(67) $$(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha.$$

Erstes Kapitel.

Trigonometrische Formeln.

1) $sin\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)-sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=sin\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)-sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right).$

Es ist

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left[2\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\quad(15)$$

$$=\cos\theta.\quad(11)$$

und $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\quad(14)$$

$$=-\cos\theta\quad(1),$$

folglich $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=2\cos\theta.$

Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß auch

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=2\cos\theta \text{ ist.}$$

2) $cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-tg\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=2\,cot\,2\theta.$

Es ist

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]\quad(13)$$

$$=-\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=-\operatorname{tg}\theta;\quad(1)$$

ferner $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\operatorname{tg}\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$ (13)

$$= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$= -\cot\theta \quad (1),$$

folglich $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cot\theta - \operatorname{tg}\theta$

$$= 2\cot 2\theta. \quad (48)$$

3) $tg^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) - cot^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = cosec^2\,\theta - sec^2\,\theta.$

Es ist $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta$ (13),

folglich $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cot^2\theta,$

dann $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\operatorname{tg}\theta$ (13),

folglich $\cot^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \operatorname{tg}^2\theta,$

mithin $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) - \cot^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cot^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta$

$$= (\operatorname{cosec}^2\theta - 1) - (\sec^2\theta - 1) \quad (2) \text{ u. } (16)$$

$$= \operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta.$$

4) $$\frac{sec^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + cosec^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{sec^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) - cosec^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = sec\,2\theta.$$

Es ist

$$\frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sec^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) - \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = \frac{\operatorname{cosec}^2\theta + \sec^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta} \,(11) \text{u.} (12).$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (31)$$
$$= \sec^2 \theta.$$

5) $\dfrac{1 + \sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{1}{2}(1 + tg\,\frac{1}{2}\theta)^2.$

Es ist

$$\frac{1 + \sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \quad (2),\ (27)\text{ und }(42)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2} + 2\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)^2.$$

6) $\sqrt{\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}} = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$

Es ist

$$\sqrt{\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}} \quad (1)$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}} \quad (41)\text{ und }(42)$$

$$= \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

7) $\dfrac{2\cot\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right).\cot\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\mathrm{cosec}\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right).\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} = 1 + \sin\theta.$

Es ist

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)} \quad (1)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}=1;$$

ferner ist

$$\frac{2}{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$=\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]+\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right] \quad (23)$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}+\sin 2\theta$$

$$=1+\sin 2\theta \quad (8), \text{ u. s. w.}$$

8) $$\frac{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right).\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cot\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}=\operatorname{tg}\theta.$$

Es ist

$$\frac{\cot\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=2\operatorname{cosec}\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \quad (47)$$

$$=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\theta} \quad (1) \text{ u. } (6)$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\theta} \quad (27);$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}.$$

9) $\frac{tg\,\theta + sec\,\theta}{cot\,\theta + cosec\,\theta} = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$

Es ist

$$\frac{\operatorname{tg}\theta + \sec\theta}{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} : \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1 + \sin\theta}{1 + \cos\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \cdot \operatorname{tg}\theta \text{ (2), (27) u. (42)},$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2 \cdot \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} \quad (40)$$

$$= \left(1 + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} \quad (5)$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \quad (52).$$

10) $\left(sec\frac{\pi}{4} + sin\,2\,\theta\right)\left(sec\frac{\pi}{4} - sin\,2\,\theta\right) = 2\,(sin^4\theta + cos^4\theta).$

Es ist

$$\left(\sec\frac{\pi}{4} + \sin 2\theta\right)\left(\sec\frac{\pi}{4} - \sin 2\theta\right)$$

$$= (\sqrt{2} + \sin 2\theta)(\sqrt{2} - \sin 2\theta) \quad (9)$$

$$= 2 - \sin^2 2\,\theta$$
$$= 2 - 4 \sin^2\theta \cos^2\theta \quad (27)$$
$$= 2\,(1 - 2 \sin^2\theta \cos^2\theta)$$
$$= 2\left[(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2 \sin^2\theta \cos^2\theta\right]$$
$$= 2\,(\sin^4\theta + \cos^4\theta).$$

11) $$\frac{sec\left(\frac{\pi}{4} + n\theta\right)}{sec\,\frac{\pi}{4} \cdot sec\,2n\theta} = sin\,n\theta + cos\,n\theta.$$

Es ist

$$\frac{\sec\left(\frac{\pi}{4} + n\theta\right)}{\sec\frac{\pi}{4} \cdot \sec 2n\theta} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos 2n\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\theta\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{4}(\cos^2 n\theta - \sin^2 n\theta)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos n\theta - \sin\frac{\pi}{4}\sin n\theta} \quad (31)\text{ u. }(22)$$

$$= \frac{(\cos n\theta + \sin n\theta)\,(\cos n\theta - \sin n\theta)}{\cos n\theta - \sin n\theta}$$

$$= \sin n\theta + \cos n\theta.$$

12) $$\frac{sec\,\theta\,cot\,\theta - cosec\,\theta\,tg\,\theta}{cos\,\theta - sin\,\theta} = cosec\,\theta\,sec\,\theta.$$

Es ist

$$\frac{\sec\theta\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta\,\operatorname{tg}\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\cos\theta - \sin\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta}}{\cos\theta - \sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta\,(\cos\theta - \sin\theta)}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta\,\sec\theta.$$

13) $\dfrac{(cosec\,\theta + sec\,\theta)^2}{cosec^2\,\theta + sec^2\,\theta} = 1 + sin\,2\,\theta.$

Es ist

$$\cosec\theta + \sec\theta = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta},$$

folglich $(\cosec\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$$= \frac{1 + \sin 2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \quad (2) \text{ u. } (27);$$

ferner ist $\cosec^2\theta + \sec^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta} + \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta};$$

mithin $\dfrac{(\cosec\theta + \sec\theta)^2}{\cosec^2\theta + \sec^2\theta} = 1 + \sin 2\theta.$

14) $\dfrac{tg\,\theta}{tg\,2\theta - tg\,\theta} = cos\,2\,\theta.$

Es ist

$$\frac{\operatorname{tg} 2\theta - \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\operatorname{tg} 2\theta}{\operatorname{tg}\theta} - 1$$
$$= \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2\theta} - 1 \quad (40)$$
$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\cos 2\theta} \quad (31).$$

15) $\dfrac{tg\,2\theta.\,tg\,\theta}{tg\,2\theta - tg\,\theta} = sin\,2\,\theta.$

Es ist

$$\frac{\operatorname{tg} 2\theta . \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg} 2\theta - \operatorname{tg}\theta} = \cos 2\theta \operatorname{tg} 2\theta \text{ (nach voriger Formel)}$$

$$= \sin 2\theta.$$

16) *sin* $45^0 =$ *sin* 75^0 — *sin* 15^0.

Es ist

$$\sin 75^0 - \sin 15^0 = 2 \cos \frac{75^0 + 15^0}{2} \sin \frac{75^0 - 15^0}{2} \quad (36)$$

$$= 2 \cos 45^0 \sin 30^0$$

$$= \cos 45^0 \quad (16)$$

$$= \sin 45^0.$$

Zusatz. $\sin 45^0 = \cos 15^0 - \sin 15^0$.

17) *cos* $36^0 = 2$ *cos* 27^0 *cos* 63^0.

Es ist

$$\cos 36^0 = \sin 54^0$$

$$= \sin 126^0$$

$$= 2 \sin 63^0 \cos 63^0 \quad (27)$$

$$= 2 \cos 27^0 \cos 63^0.$$

18) *sec* 72^0 — *sec* $36^0 =$ *sec* 60^0.

Es ist

$$\sec 72^0 - \sec 36^0 = \frac{1}{\cos 72^0} - \frac{1}{\cos 36^0}$$

$$= \frac{\cos 36^0 - \cos 72^0}{\cos 36^0 \cos 72^0}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{72^0 + 36^0}{2} \sin \frac{72^0 - 36^0}{2}}{\sin 54^0 \sin 18^0} \quad (38) \text{ u. } (1).$$

$$= \frac{2 \sin 54^0 \sin 18^0}{\sin 54^0 \sin 18^0}$$

$$= 2 = \sec 60^0 \quad (16).$$

19) $\sin 108^0 = (\sin 81^0 + \sin 9^0)(\sin 81^0 - \sin 9^0)$

Es ist

$$\begin{aligned}\sin 108^0 &= \sin 72^0\\ &= \sin 90^0 \sin 72^0 \quad (8)\\ &= \sin(81^0 + 9^0)(\sin 81^0 - 9^0)\\ &= \sin^2 81^0 - \sin^2 9^0 \quad (49)\\ &= (\sin 81^0 + \sin 9^0)(\sin 81^0 - \sin 9^0).\end{aligned}$$

20) $\dfrac{\cos 3^0 - \cos 33^0}{\sin 3^0 + \sin 33^0} = tg\, 15^0.$

Es ist

$$\frac{\cos 3^0 - \cos 33^0}{\sin 3^0 + \sin 33^0} = \frac{2 \sin\left(\frac{33+3}{2}\right)^0 \sin\left(\frac{33-3}{2}\right)^0}{2 \sin\left(\frac{33+3}{2}\right)^0 \cos\left(\frac{33-3}{2}\right)^0} (38)\ \text{u.} (35).$$

$$= \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0}$$

$$= \mathrm{tg}\, 15^0.$$

21) $\dfrac{\sin 33^0 + \sin 3^0}{\cos 33^0 + \cos 3^0} = tg\, 18^0.$

Es ist

$$\frac{\sin 33^0 + \sin 3^0}{\cos 33^0 + \cos 3^0} = \frac{2 \sin\left(\frac{33+3}{2}\right)^0 \cos\left(\frac{33-3}{2}\right)^0}{2 \cos\left(\frac{33+3}{2}\right)^0 \cos\left(\frac{33-3}{2}\right)^0} (35)\ \text{u.} (37)$$

$$= \frac{\sin 18^0}{\cos 18^0}$$

$$= \mathrm{tg}\, 18^0.$$

22) $\dfrac{\cos 9^0 + \sin 9^0}{\cos 9^0 - \sin 9^0} = tg\, 54^0.$

Es ist

$$\frac{\cos 9^0 + \sin 9^0}{\cos 9^0 - \sin 9^0} = \frac{1 + \dfrac{\sin 9^0}{\cos 9^0}}{1 - \dfrac{\sin 9^0}{\cos 9^0}}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg} 9^0}{1 - \operatorname{tg} 9^0}$$

$$= \operatorname{tg}\,(45 + 9)^0 \quad (52)$$

$$= \operatorname{tg} 54^0.$$

23) $\dfrac{\cos 27^0 - \sin 27^0}{\cos 27^0 + \sin 27^0} = tg\ 18^0.$

Es ist

$$\frac{\cos 27^0 - \sin 27^0}{\cos 27^0 + \sin 27^0} = \frac{1 - \dfrac{\sin 27^0}{\cos 27^0}}{1 + \dfrac{\sin 27^0}{\cos 27^0}}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg} 27^0}{1 + \operatorname{tg} 27^0}$$

$$= \cot\,(45 + 27)^0 \quad (52)$$

$$= \operatorname{tg}\,(45 - 27)^0 \quad (1)$$

$$= \operatorname{tg} 18^0.$$

24) $\sin\alpha \cos(\beta - \gamma) - \sin\beta \cos(\alpha - \gamma) = \sin(\alpha - \beta)\cos\gamma.$

Es ist

$$\sin\alpha\cos(\beta-\gamma) - \sin\beta\cos(\alpha-\gamma)$$

$$= \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma)] - \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\beta+\gamma-\alpha)] \quad (24)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\sin[\gamma + (\alpha-\beta)] - \sin[\gamma - (\alpha-\beta)]\right\}$$

$$= \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma. \quad (24.)$$

25) Für $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$ ist

$$\frac{\cos\alpha + \sin\gamma - \sin\beta}{\cos\beta + \sin\gamma - \sin\alpha} = \frac{1 + tg\,\frac{1}{2}\alpha}{1 + tg\,\frac{1}{2}\beta}.$$

Es ist

$$\cos\alpha + \sin\gamma - \sin\beta = \sin(\beta+\gamma) + \sin\gamma - \sin\beta$$

$$= 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\sin\frac{\beta+\gamma}{2} - \sin\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \quad (27) \text{ u. } (36)$$

$$= 4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2} \quad (24);$$

auf ähnliche Weise erhält man

$$\cos\beta + \sin\gamma - \sin\alpha = 4\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

mithin ist

$$\frac{\cos\alpha + \sin\beta - \sin\beta}{\cos\beta + \sin\gamma - \sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\cos(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos(45 - \frac{1}{2}\beta}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \quad (43).$$

26) *sin* $\frac{\pi}{4}$ ist das harmonische Mittel zwischen *tg* $\frac{\pi}{8}$ und *cot* $\frac{\pi}{8}$.

Es ist $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}{\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}}$ (27) u. (2)

$$= \frac{2}{\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}}$$

$$= \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \cot\frac{\pi}{8}}$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \cot \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \cot \frac{\pi}{8}}.$$

27) Wenn $tg \frac{\alpha}{2} = tg^3 \frac{\beta}{2}$

und $tg \beta = 2 tg \varphi$ ist,

so ist φ das arithmetische Mittel zwischen α und β.

Es ist

$$\operatorname{tg} (\tfrac{1}{2} \alpha + \tfrac{1}{2} \beta) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} \beta + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta}{1 - \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} \beta}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \beta + 1)}{(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \beta)(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \beta)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \beta}$$

$$= \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \beta$$

$$= \operatorname{tg} \varphi,$$

folglich $n\pi + \varphi = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$,

wo $n = o$ oder gleich einer ganzen, positiven oder negativen, Zahl ist. Im ersteren Falle ist

$$\varphi = \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

28) Es ist zu beweisen, daß

$$sin (45 \pm x) = \sqrt{\frac{1 \pm sin\, 2x}{2}}.$$

Es ist $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$,

Setzt man $\alpha = 45 \pm x$,

so hat man

$$\sin (45 \pm x) = \sqrt{\frac{1 - \cos (90 \pm 2x)}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1 \pm \sin 2x}{2}}.$$

29) Es ist zu beweisen, daß

$$2\cos\left(60 \pm \frac{30}{2^n}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots\sqrt{2}}}},$$

wo rechts die Zahl (2) n mal vorkommt und links das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem n gerade oder ungerade ist.

Da nach vorigem Satze

$$2\sin(45 - \tfrac{1}{2}x) = \sqrt{2 - 2\sin x}$$

ist, so erhält man, wenn man $45 - \frac{x}{2}$ für x setzt,

$$2\sin\left[45 - \frac{1}{2}\left(45 - \frac{x}{2}\right)\right] = \sqrt{2 - 2\sin\left(45 - \frac{x}{2}\right)}$$

oder

$$2\sin\left(45 - \frac{45}{2} + \frac{x}{2^2}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - 2\sin x}}.$$

Setzt man in diese Formel wieder

$45 - \frac{x}{2}$ für x, so hat man:

$$2\sin\left(45 - \frac{45}{2} + \frac{45}{2^2} - \frac{x}{2^3}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2 - 2\sin\left(45 - \frac{x}{2}\right)}}$$

$$= \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2 - 2\sin x}}}.$$

Durch Fortsetzung der obigen Substitution erhält man

$$2\sin\left\{\left(45 - \frac{45}{2} + \frac{45}{2^2} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{45}{2^{n-1}}\right) + (-1)^n\frac{x}{2^n}\right\}$$

$$= \sqrt{2-\sqrt{2-\ldots\sqrt{2-2\sin x}}},$$

oder

$$2\sin\left[45.\frac{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}{1+\frac{1}{2}}+(-1)^n\frac{x}{2^n}\right]$$

$$=2\sin\left[30.\left(1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right)+(-1)^n\frac{x}{2^n}\right]$$

$$=2\sin\left[30-(-\tfrac{1}{2})^n(30-x)\right]$$

$$=2\cos\left[60+(-\tfrac{1}{2})^n(30-x)\right]=\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots\sqrt{2-2\sin x}}}.$$

Setzt man $x=o$, so geht die Formel über in folgende

$$2\cos\left(60\pm\frac{30}{2^n}\right)=\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots\sqrt{2}}}}.$$

Zweites Kapitel.

Trigonometrische Gleichungen.

30) Wenn $tg\;\theta=tg^3\frac{\varphi}{2}$ und

$$cos^2\,\varphi=\frac{m^2-1}{3},$$

dann ist

$$m=\frac{2}{\left[(\cos\theta)^{\frac{2}{3}}+(\sin\theta)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Es ist

$$\cos\varphi=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}\theta}{1+\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}\theta}$$

$$= \frac{\cos^{\frac{2}{3}}\theta - \sin^{\frac{2}{3}}\theta}{\cos^{\frac{2}{3}}\theta + \sin^{\frac{2}{3}}\theta},$$

folglich

$$m^2 = 1 + 3\cos^2\varphi$$

$$= 1 + 3.\left(\frac{\cos^{\frac{4}{3}}\theta - 2\sin^{\frac{2}{3}}\theta\cos^{\frac{2}{3}}\theta + \sin^{\frac{4}{3}}\theta}{\cos^{\frac{4}{3}}\theta + 2\sin^{\frac{2}{3}}\theta\cos^{\frac{2}{3}}\theta + \sin^{\frac{4}{3}}\theta}\right)$$

$$= 4.\left(\frac{\cos^{\frac{4}{3}}\theta - \sin^{\frac{2}{3}}\theta\cos^{\frac{2}{3}}\theta + \sin^{\frac{4}{3}}\theta}{(\cos^{\frac{2}{3}}\theta + \sin^{\frac{2}{3}}\theta)^2}\right)$$

$$= 4.\left(\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(\cos^{\frac{2}{3}}\theta + \sin^{\frac{2}{3}}\theta)^3}\right),$$

$$= \frac{4}{(\cos^{\frac{2}{3}}\theta + \sin^{\frac{2}{3}}\theta)^3},$$

also

$$m = \frac{2}{(\cos^{\frac{2}{3}}\theta + \sin^{\frac{2}{3}}\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

31) Wenn $sin\, x = sin\, a\, sin\,(x + y)$ ist, so ist

$$tg\, x = \frac{sin\, a\, sin\, y}{1 - sin\, a\, cos\, y}$$

Es ist

$$\sin x = \sin a\,(\sin x \cos y + \cos x \sin y),$$

folglich

$$\sin x\,(1 - \sin a \cos y) = \cos x \sin a \sin y$$

und also

$$\frac{\sin x}{\cos x} = tg\, x = \frac{\sin a \sin y}{1 - \sin a \cos y}$$

32) Wenn $tg\, x = cos\, a\, tg\, y$ ist, so ist

$$tg\,(y - x) = \frac{tg^2\,\frac{1}{2}a\, sin\, 2y}{1 + tg^2\,\frac{1}{2}a\, cos\, 2y}.$$

Weil $\operatorname{tg} x = \cos a \operatorname{tg} y$, so ist

$$\operatorname{tg}(y - x) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} y\,(1 - \cos a)}{1 + \cos a \operatorname{tg}^2 y}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a \operatorname{tg} y}{1 + (\cos^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} a) \operatorname{tg}^2 y}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a \sin y \cos y}{\cos^2 y + (\cos^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} a) \sin^2 y}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a \sin 2y}{(\cos^2 \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} a)(1 + \cos 2y) + (\cos^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} a)(1 - \cos 2y)}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a \sin 2y}{2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a \cos 2y}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} a \sin 2y}{1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} a \cos 2y}.$$

33) Die allgemeine Form aller möglichen Werthe von A in der Gleichung

$$\cos A + \sin A = \sqrt{2}$$

zu bestimmen.

Es ist $\cos A + \sin A = \sqrt{2}$,

oder $\cos(A - 45)\sqrt{2} = \sqrt{2}$,

oder $\cos(A - 45) = 1 = \cos 2n\pi$,

$$A - 45 = 2n\pi$$

$$A = 2n\pi + 45 = 2n\pi + \frac{\pi}{4}.$$

34) Unter welchen Bedingungen ist

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$$

eine richtige Gleichung?

Man kann der gegebenen Gleichung auch die Form geben

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = o \ldots (A)$$

oder $\cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} = \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \ldots (B).$

Der Bedingung *(A)* wird genügt, wenn

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = n\pi$$

oder $\alpha + \beta = 2n\pi$,

wo $n = o$ oder einer beliebigen ganzen Zahl sein kann.

Soll der Bedingung *(B)* genügt werden, so muß

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

oder $2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = o$.

Diese Gleichung ist richtig, wenn

$$\frac{\alpha}{2} = n\pi,\ \alpha = 2n\pi$$

oder $\frac{\beta}{2} = n\pi,\ \beta = 2n\pi$.

Der Gleichung $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$ wird demnach genügt, wenn eine der drei Größen, α, β, $\alpha + \beta = o$ oder gleich einem Vielfachen von 360^0 ist.

35) Wenn $\sin\theta = a$ gegeben ist, so haben von den Ausdrücken $\sin\frac{\theta}{2}$ und $\cos\frac{\theta}{2}$ jeder 4 verschiedene Werthe, hingegen $tg\,\frac{\theta}{2}$ nur zwei verschiedene Werthe.

Bezeichnet α den kleinsten Werth von arc sin a, so sind die Werthe von θ enthalten in den Ausdrücken

$$2m\pi + \alpha \text{ und } (2m + 1)\pi - \alpha,$$

wo m eine ganze Zahl ist. Hieraus ergeben sich für $\sin\frac{\theta}{2}$ die Werthe.

$$\sin\left(m\pi + \frac{\alpha}{2}\right) \text{ und } \sin\left(m\pi + \frac{\pi - \alpha}{2}\right),$$

also $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sin\frac{\alpha}{2}$ und $= \pm\cos\frac{\alpha}{2}$.

Ganz dasselbe findet für $\cos\frac{\theta}{2}$ statt.

Sucht man die Werthe für $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, so hat man ebenfalls

$$\operatorname{tg}\left(m\pi+\frac{\alpha}{2}\right) \text{ und } \operatorname{tg}\left(m\pi+\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$

oder $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ und $\cot\frac{\alpha}{2}$.

36) Welchen Werth erhält der Ausdruck

$$a\cos 2\theta + b\sin 2\theta,$$

wenn $tg\,\theta = \frac{b}{a}$ gesetzt wird.

Es ist

$$\begin{aligned} a\cos 2\theta + b\sin 2\theta &= a\left(\cos 2\theta + \frac{b}{a}\sin 2\theta\right) \\ &= a\,(\cos 2\theta + \operatorname{tg}\theta \sin 2\theta) \\ &= \frac{a}{\cos\theta}\,(\cos 2\theta\cos\theta + \sin\theta\sin 2\theta) \\ &= \frac{a}{\cos\theta}\cos\theta \\ &= a. \end{aligned}$$

37) Gegeben ist die Gleichung

$$\cos nA + \cos(n-2)A = \cos A,$$

es soll der Werth von A bestimmt werden.

Es ist

$$\cos A = \cos nA + \cos(n-2)A$$

oder $\cos A = 2\cos(n-1)A\cos A.$ (37.)

Dieser Gleichung wird genügt, wenn

$$\cos A = o, \text{ mithin } A = 2m\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

ist, oder wenn

$$2\cos(n-1)A = 1,$$

oder $\cos(n-1)A = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$,

oder $(n-1)A = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3}$,

oder $A = \frac{6m \pm 1}{3(n-1)} \cdot \pi$

ist, wo m eine ganze (negative oder positive) Zahl bezeichnet.

38) Aus den Gleichungen

$$\cos(\varphi - \theta + \alpha)\cos(\theta - \alpha) = m$$
$$\cos(\varphi - \theta - \alpha)\cos(\theta + \alpha) = m$$

soll θ eliminirt werden.

Aus den gegebenen Gleichungen ergiebt sich

$$\cos\varphi + \cos[\varphi - 2(\theta - \alpha)] \quad (37)$$
$$= \cos\varphi + \cos[\varphi - 2(\theta + \alpha)] = 2m$$

oder $\cos[(\varphi - 2\theta) + 2\alpha] = \cos[(\varphi - 2\theta) - 2\alpha]$,

$$2\sin(\varphi - 2\theta)\sin 2\alpha = o,$$
$$\varphi - 2\theta = n\pi,$$

wo n eine ganze Zahl ist;

mithin ist

$$2m = \cos\varphi + \cos(n\pi + 2\alpha) = \cos\varphi \pm \cos 2\alpha.$$

39) Aus der Gleichung

$$arc\ tg(x+1) = 3\ arc\ tg(x-1)$$

den Werth von x zu bestimmen.

Es ist $\text{arc tg}(x+1) = \text{arc tg}\left\{\frac{(x-1)^3 - 3(x-1)}{3(x-1)^2 - 1}\right\}$

mithin $x + 1 = \frac{(x-1)^3 - 3(x-1)}{3(x-1)^2 - 1}$

$$= \frac{(x-1)^2 - 3}{3(x-1) - \frac{1}{x-1}},$$

$$3(x^2 - 1) - \frac{x+1}{x-1} = (x-1)^2 - 3,$$

$$3x^2 - \frac{x+1}{x-1} = (x-1)^2,$$

$$3x^3 - 3x^2 - x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$$
$$2x^3 = 4x$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}.$$

40) Aus den Gleichungen

$$A = sec\,\alpha + cosec\,\alpha\; tg^3\alpha\,(1 + cosec^2\alpha)$$
$$B = tg\,\alpha - tg^3\alpha\,(1 + cosec^2\alpha)$$

soll α eliminirt werden.

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sin\alpha$ erhält man:

$$A\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^3\alpha\,(2 + \cot^2\alpha)$$
$$= 2\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}^3\alpha$$
$$= 2\operatorname{tg}\alpha\,\sec^2\alpha,$$
$$A = \frac{2}{\cos\alpha}\,.\,\sec^2\alpha$$

oder $A = 2\sec^3\alpha \ldots (A)$

$$B = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha\,(2 + \cot^2\alpha)$$

oder $B = -2\operatorname{tg}^3\alpha \ldots (B)$

Aus (A) und (B) erhält man

$$\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{B}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

oder $A^{\frac{2}{3}} - B^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$.

41) Aus den Gleichungen

$$m = cosec\,\theta - sin\,\theta$$

und $n = sec\,\theta - cos\,\theta$

soll θ eliminirt werden.

Es ist

$$m = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta$$

oder $m = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \ldots \quad (1)$

$$n = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \ldots \quad (2)$$

folglich $mn = \sin\theta\cos\theta$.

Werden (1) und (2) mit $\frac{2}{3}$ potenzirt und dann beide Ausdrücke addirt, so erhält man

$$m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}} = \frac{\cos^{\frac{4}{3}}\theta}{\cos^{\frac{2}{3}}\theta} + \frac{\sin^{\frac{4}{3}}\theta}{\sin^{\frac{2}{3}}\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin^{\frac{2}{3}}\theta\cos^{\frac{2}{3}}\theta}$$

$$= \frac{1}{(\sin\theta\cos\theta)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{(mn)^{\frac{2}{3}}},$$

man erhält demnach

$$(mn)^{\frac{2}{3}}(m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}}) = 1.$$

42) Wenn

$$\cos(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \delta) = \cos(\alpha + \beta)\sin(\gamma + \delta)$$

ist, so bestimmt sich

$$\cot\delta = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma.$$

Aus der gegebenen Gleichung erhält man

$$(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)(\sin\gamma\cos\delta - \cos\gamma\sin\delta)$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta).$$

Dividirt man beide Seiten durch

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta,$$

so erhält man

$$(\cot\alpha\cot\beta + 1)(\cot\delta - \cot\gamma)$$
$$= (\cot\alpha\cot\beta - 1)(\cot\delta + \cot\gamma)$$

oder

$$\cot\alpha\cot\beta\cot\delta - \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma + \cot\delta - \cot\gamma$$
$$= \cot\alpha\cot\beta\cot\delta + \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma - \cot\delta - \cot\gamma,$$
$$2\cot\delta = 2\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma,$$
$$\cot\delta = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma.$$

43) Gegeben ist die Gleichung

$$\sin(b+x) + \sin a \left\{\sin^2 b - \sin^2 a\right\} + \sin\left\{2a - (b-x)\right\}$$
$$= [\cos^2 b - \cos^2 a] \sin(a+2x),$$

es soll gezeigt werden, daß

$$x = arc\ sec \left\{\frac{\sin(a+b)}{\cot(a-b)}\right\}$$

ist.

Aus der gegebenen Gleichung ergiebt sich

$$\sin(b+x) + \sin(2a - b + x) =$$
$$(\sin^2 a - \sin^2 b)[\sin(a+2x) + \sin a], \quad (49),$$

oder $2\sin(a+x)\cos(a-b)$ (35)

$$= \sin(a+b)\sin(a-b)\,2\sin(a+x)\cos x. \quad (49).$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn

$$\sin(a+x) = o, \text{ also } a+x = m\pi,$$
$$x = m\pi - a,$$

oder wenn $\cot(a-b) = \sin(a+b)\cos x$,

$$\sec x = \frac{\sin(a+b)}{\cot(a-b)},$$

$$x = \text{arc sec}\left\{\frac{\sin(a+b)}{\cot(a-b)}\right\}$$

ist.

44) Es soll bewiesen werden, daß der Werth von x in der Gleichung

$$\cos(a+x) = \cos a \sin x + \sin b$$

gefunden werden kann mittelst der Gleichungen

$$\cos(\varphi + x) = \frac{\sin b}{\cos a} \cos\varphi \text{ und } tg\,\varphi = \frac{\sin(45+a)}{\cos 45.\cos a}.$$

Die gegebene Gleichung läßt sich auch schreiben

$$\cos a \cos x - \sin a \sin x = \cos a \sin x + \sin b,$$
$$\cos a \cos x - (\sin a + \cos a)\sin x = \sin b.$$

Man setze $\dfrac{\sin a + \cos a}{\cos a} = \text{tg}\,\varphi = \dfrac{\sin(45+a)}{\cos 45.\cos a}$ (43),

so erhält man

$$\sin b = \cos a \cos x - \cos a \sin x\, \text{tg}\,\varphi$$
$$= \cos a(\cos x - \sin x\, \text{tg}\,\varphi)$$

$$= \frac{\cos a}{\cos\varphi}(\cos x \cos\varphi - \sin x \sin\varphi)$$

$$= \frac{\cos a}{\cos\varphi} \cos(x+\varphi),$$

folglich $\cos(x+\varphi) = \frac{\sin b \cos\varphi}{\cos a}$.

45) Aus der Gleichung

$$\sin\theta - \cos\theta = 4\cos^2\theta \sin\theta$$

den Werth von θ zu bestimmen.

Aus der gegebenen Gleichung erhält man

$$\sin\theta - \cos\theta = 2\cos\theta \sin 2\theta \quad (27)$$

$$= \sin 3\theta + \sin\theta \quad (23),$$

folglich $\sin 3\theta = -\cos\theta$

$$= \cos[(2m+1)\pi \pm \theta],$$

oder $\cos\left(3\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos[(2m+1)\pi \pm \theta]$,

$$3\theta - \frac{\pi}{2} = (2m+1)\pi \pm \theta$$

$$3\theta \mp \theta = \frac{(4m+3)\pi}{2},$$

mithin $\theta = \frac{(4m+3)\pi}{4}$

oder $\theta = \frac{(4m+3)\pi}{8}$.

46) Aus der Gleichung

$$tg^2 x + \sec 2x = \frac{7\sqrt{3}-10}{\sqrt{3}}$$

soll der Werth von x bestimmt werden.

Aus der gegebenen Gleichung ergiebt sich

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} + \sec 2x = \frac{7\sqrt{3}-10}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{\sec 2x - 1}{\sec 2x - 1} + \sec 2x = \frac{7\sqrt{3}-10}{\sqrt{3}}$$

$$1-\frac{2}{\sec 2x+1}+\sec 2x=\frac{7\sqrt{3}-10}{\sqrt{3}},$$

$$(\sec 2x+1)-\frac{2}{\sec 2x+1}=\frac{7\sqrt{3}-10}{\sqrt{3}},$$

$$(\sec 2x+1)^2-\frac{7\sqrt{3}-10}{\sqrt{3}}\cdot(\sec 2x+1)=2.$$

Durch Lösung der quadratischen Gleichung erhält man:

$$\sec 2x+1=\frac{7\sqrt{3}-10}{2\sqrt{3}}\pm\frac{14-5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},$$

woraus sich bestimmt:

$$\sec 2x=\frac{(5\sqrt{3}-10)\pm(14-5\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ oder } 5-4\sqrt{3}.$$

Es ist demnach

$$2x=2n\pi\pm 30^0 \quad (17)$$

$$\text{oder} = \text{arc sec }(5-4\sqrt{3}).$$

Aus ersterem Werthe ergiebt sich demnach

$$x=n\pi\pm 15^0,$$

wo n eine ganze Zahl ist.

Aus den zweiten Werthe erhält man

$$2x=\text{arc cos}\frac{1}{5-4\sqrt{3}}$$

$$=\text{arc cos}-\left(\frac{5+4\sqrt{3}}{23}\right)$$

$$=\text{arc cos}(-0{,}518) \text{ angenähert}$$

$$=\text{arc cos}(-\tfrac{1}{2}),$$

$$\text{mithin } 2x \text{ nahe} = 120^0$$

$$\text{oder } x \text{ nahe} = n\pi\pm 60^0.$$

47) Aus der Gleichung

$$\text{arc tg}\frac{1}{x-1}-\text{arc tg}\frac{1}{x+1}=\frac{\pi}{12}$$

soll der Werth von x bestimmt werden.

Nach (39) ist

$$\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{1+\frac{1}{x^2-1}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3} \quad (19)$$

oder nach gehöriger Entwickelung

$$\frac{2}{x^2}=2-\sqrt{3}$$

$$x^2=\frac{2}{2-\sqrt{3}}=\frac{4}{4-2\sqrt{3}},$$

$$x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\pm(1+\sqrt{3}).$$

48) Aus der Gleichung

$$\operatorname{arc\,sec} a-\operatorname{arc\,sec} b=\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{b}-\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{a}$$

den Werth von x zu bestimmen.

Setzt man $\operatorname{arc\,sec} a=\alpha,$

$\operatorname{arc\,sec} b=\beta,$

$\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{b}=\theta,$

$\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{a}=\varphi,$

so ist $\alpha-\beta=\theta-\varphi,$

$$\cos\alpha=\frac{1}{a},\ \cos\beta=\frac{1}{b},\ \cos\theta=\frac{b}{x},\ \cos\varphi=\frac{a}{x},$$

folglich $\cos\alpha\cos\varphi=\cos\beta\cos\theta\ \ldots\ (1),$

und weil $\alpha+\varphi=\beta+\theta,$

und deshalb $\cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\sin\varphi=\cos\beta\cos\theta-\sin\beta\sin\theta,$

auch $\sin\alpha\sin\varphi=\sin\beta\sin\theta\ \ldots\ (2).$

Aus (1) und (2) erhält man nun

$$\cos\varphi=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\cdot\cos\theta,$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\sin\theta,$$

und daher

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 = \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\theta + \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}(1-\cos^2\theta),$$

oder

$$\frac{\cos^2\beta\sin^2\alpha - \sin^2\beta\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\theta = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$$

Nun ist

$$\cos^2\beta\sin^2\alpha - \sin^2\beta\cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\beta \quad (49),$$

folglich erhält man

$$\cos^2\theta = \cos^2\alpha$$

$$\text{und } \cos\theta = \frac{b}{x} = \pm\cos\alpha = \pm\frac{1}{a},$$

$$x = \pm ab.$$

49) Es ist die Gleichung

$$tg\, a\, tg x = tg^2(a+x) - tg^2(a-x)$$

gegeben, es soll x bestimmt werden.

Aus der gegebenen Gleichung erhält man

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} x = \left\{\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tg}(a-x)\right\}\left\{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)\right\}$$

oder

$$\frac{\sin a\sin x}{\cos a\cos x} = \frac{\sin[(a+x)+(a-x)]}{\cos(a+x)\cos(a-x)}\cdot\frac{\sin[(a+x)-(a-x)]}{\cos(a+x)\cos(a-x)} \quad (45)$$

$$= \frac{\sin 2a\sin 2x}{\cos^2(a+x)\cos^2(a-x)},$$

$$\frac{\sin a\sin x}{\cos a\cos x} = \frac{4\sin a\cos a\sin x\cos x}{\cos^2(a+x)\cos^2(a-x)} \ldots (A).$$

Der Gleichung (A) wird genügt, wenn

$\sin x = o$, oder $x = m\pi$ ist.

Aus der Gleichung (A) erhält man aber auch

$$\cos^2(a+x)\cos^2(a-x) = 4\cos^2 a\cos^2 x,$$

$$\cos(a+x)\cos(a-x) = \pm 2\cos a\cos x,$$

$$\tfrac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2x) = \pm 2\cos a \cos x,$$

$$\tfrac{1}{2}(1 - 2\sin^2 a + 2\cos^2 x - 1) = \pm 2\cos a \cos x,$$

$$\cos^2 x - \sin^2 a = \pm 2\cos a \cos x \quad (49),$$

$$\cos^2 x \pm 2\cos a \cos x + \cos^2 a - 1 = o,$$

$$\cos x = \pm (1 \pm \cos a).$$

Ist $a < \frac{\pi}{2}$, so ist $1 + \cos a > 1$, folglich ist in diesem Falle

$$\cos x = \pm (1 - \cos a) = \pm 2\sin^2 \frac{a}{2}.$$

Ist $a < \frac{\pi}{2}$, so ist $1 - \cos a > 1$, und folglich

$$\cos x = \pm (1 + \cos a) = \pm 2\cos^2 \frac{a}{2}.$$

50) Der Ausdruck

$$a\cos\theta + b\cos(\theta + \alpha)$$

soll unter die Form $A \cos(\theta + B)$ gebracht werden. A und B sind zu bestimmen.

Es ist

$$a\cos\theta + b\cos(\theta + \alpha) = (a + b\cos\alpha)\cos\theta - b\sin\alpha\sin\theta$$

$$= b\sin\alpha \left\{\frac{a + b\cos\alpha}{b\sin\alpha} \cdot \cos\theta - \sin\theta\right\}.$$

Setzt man $\frac{a + b\cos\alpha}{b\sin\alpha} = \cot B \ldots (A),$

so ist $a\cos\theta + b\cos(\theta + \alpha) = b\sin\alpha(\cot B\cos\theta - \sin\theta)$

$$= \frac{b\sin\alpha}{\sin B}(\cos\theta + B)$$

$$= b\sin\alpha \operatorname{cosec} B \cos(\theta + B) \ldots (B).$$

Nun ist

$$\operatorname{cosec} B = \sqrt{1 + \cot^2 B} \quad (4)$$

$$= \sqrt{1 + \frac{a^2 + b^2\cos^2\alpha + 2ab\cos\alpha}{b^2\sin^2\alpha}} \text{ nach } (A).$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{b\sin\alpha}.$$

Wird dieser Werth in *(B)* eingesetzt, so erhält man

$$a\cos\theta + b\cos(\theta+\alpha) = \sqrt{a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2}.\ \cos(\theta + B).$$

51) Aus den Gleichungen

$$p\ sin^4\theta - q\ sin^4\varphi = p,$$
$$p\ cos^4\theta - q\ cos^4\varphi = q$$

den Werth von θ und φ zu finden.

Durch Subtraction der gegebenen Gleichungen erhält man

$$p(\cos^4\theta - \sin^4\theta) - q(\cos^4\varphi - \sin^4\varphi) = q - p,$$
$$p\cos 2\theta - q\cos 2\varphi = q - p,$$
$$p\cos^2\theta = q\cos^2\varphi \quad (42),$$

folglich $p\cos^4\theta - \frac{p^2}{q}\cos^4\theta = q,$

$$\cos\theta = \sqrt[4]{\frac{q^2}{pq - p^2}},$$

$$\cos\varphi = \sqrt[4]{\frac{p}{q-p}}.$$

52) Aus den Gleichungen

$$\theta - \varphi = arc\ sin\frac{1}{10},$$

$$\frac{sin^2\theta\ cos^2\varphi + cos^2\theta\ sin^2\varphi}{sin^2\theta\ cos^2\varphi - cos^2\theta\ sin^2\varphi} = \frac{5}{3}$$

die Werthe von θ und φ zu bestimmen.

Aus der gegebenen Gleichung erhält man

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\cos^2\theta\sin^2\varphi} = \frac{5+3}{5-3} = 4,$$

$$\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\cos\theta\sin\varphi} = \pm 2.$$

Nimmt man zunächst das positive Zeichen, so hat man

$$\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi = \cos\theta\sin\varphi$$

oder $\sin(\theta - \varphi) = \cos\theta\sin\varphi = \frac{1}{10}$

und $\sin\theta\cos\varphi = \frac{1}{5}$,

folglich $\sin(\theta + \varphi) = \frac{3}{10}$,

mithin $2\theta = \text{arc}\sin\frac{3}{10} + \text{arc}\sin\frac{1}{10}$

und $2\varphi = \text{arc}\sin\frac{3}{10} - \text{arc}\sin\frac{1}{10}$.

Nimmt man das Minuszeichen, so hat man

$$-3\cos\theta\sin\varphi = \frac{1}{10},$$

$$\cos\theta\sin\varphi = -\frac{1}{30},$$

$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{1}{15},$$

also $\sin(\theta + \varphi) = \frac{1}{30}$,

$$\sin(\theta - \varphi) = \frac{1}{10},$$

folglich $2\theta = \text{arc}\sin\frac{1}{30} + \text{arc}\sin\frac{1}{10}$,

$$2\varphi = \text{arc}\sin\frac{1}{30} - \text{arc}\sin\frac{1}{10}.$$

53) Aus der Gleichung

$$\text{arc sin vers}\,x - \text{arc sin vers}\,bx = \text{arc sin vers}\,(1 - b)$$

den Werth von x zu bestimmen.

Setzt man arc sin vers $x = \theta$

und arc sin vers $bx = \varphi$,

so ist $x = 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$,

und $bx = 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$,

und weil $\theta - \varphi = \text{arc sin vers}\,(1-b)$,

$$1 - b = 1 - \cos(\theta - \varphi),$$

oder $\cos(\theta - \varphi) = b$,

$$\text{und } \cos\frac{\theta - b}{2} = \sqrt{\frac{1+b}{2}}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$= \sqrt{\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{bx}{2}\right)} + \sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{bx}{2}},$$

mithin

$$\sqrt{\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{bx}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1+b}{2}} - \frac{x}{2}\sqrt{b},$$

$$1 - (1+b)\frac{x}{2} + \frac{bx^2}{4} = \frac{1+b}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{2b(1+b)} + \frac{bx^2}{4},$$

$$\frac{1-b}{2} = \sqrt{1+b}.\,(\sqrt{1+b} - \sqrt{2b})\frac{x}{2};$$

oder

$$(\sqrt{1+b} + \sqrt{2b})(\sqrt{1+b} - \sqrt{2b}) = \sqrt{1+b}(\sqrt{1+b} - \sqrt{2b})\,x,$$

$$x = \frac{\sqrt{1+b} + \sqrt{2b}}{\sqrt{1+b}} = 1 + \sqrt{\frac{2b}{1+b}}.$$

54) Aus der Gleichung

$$cosec^2\frac{\theta}{2} - sec^2\frac{\theta}{2} = 2\,cosec^2\,\theta.\sqrt{3}$$

soll der Werth von θ bestimmt werden.

Die gegebene Gleichung läßt sich auch schreiben

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin^2\theta}$$

oder

$$\frac{4\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin^2\theta} \quad (31) \text{ u. } (27),$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (17).$$

55) Aus den Gleichungen

$15(1 - \cos 2\theta \cos 2\varphi) = 17 \sin 2\theta \sin 2\varphi,$

$\sin(\theta - \varphi) + \frac{1}{2}\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)} = (tg\,\theta - 1)\cos\theta\cos\varphi$

sollen die Werthe für $tg\,\theta$ und $tg\,\varphi$ bestimmt werden.

Aus der ersten Gleichung erhält man

$$\frac{1 - \cos 2\theta \cos 2\varphi}{\sin 2\theta \sin 2\varphi} = \frac{17}{15},$$

$$\frac{1 - \cos 2(\theta+\varphi)}{1 - \cos 2(\theta-\varphi)} = \frac{17+15}{17-15} = 16,$$

$$\frac{\sin^2(\theta+\varphi)}{\sin^2(\theta-\varphi)} = 16 \quad (41),$$

$$\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin(\theta-\varphi)} = \pm 4 \ldots (1).$$

$$\frac{tg\,\theta + tg\,\varphi}{tg\,\theta - tg\,\varphi} = 4 \quad (45),$$

$$\frac{tg\,\theta}{tg\,\varphi} = \frac{5}{3} \ldots (2).$$

Wegen (1) geht nun die zweite gegebene Gleichung über in

$$\sin(\theta-\varphi) + \frac{1}{2}\sqrt{4\sin^2(\theta-\varphi)} = (tg\,\theta - 1)\cos\theta\cos\varphi$$

oder $2\sin(\theta-\varphi) = (tg\,\theta - 1)\cos\theta\cos\varphi,$

$$\frac{2\sin(\theta-\varphi)}{\cos\theta\cos\varphi} = 2(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi) = \operatorname{tg}\theta - 1,$$

$$2\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta = 1,$$

$$2\operatorname{tg}\varphi - \frac{5}{3}\operatorname{tg}\varphi = 1 \text{ (wegen (2.)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 3 \text{ und } \operatorname{tg}\theta = 5.$$

Anmerk. Wird aus (1) der negative Werth genommen, so erhält man für θ und φ unmögliche Werthe.

56) Alle Werthe von θ, welche der Gleichung

$$tg\,\theta + cot\,\theta = 4$$

genügen, sind enthalten in dem Ausdrucke

$$\left(n + \frac{1}{4} \pm \frac{1}{6}\right)\pi.$$

Es ist

$$\operatorname{tg}\theta + \cot\theta = 2\operatorname{cosec} 2\theta = 4 \quad (47),$$

mithin $\sin 2\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ (16);

folglich $2\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ oder $= (2n+1)\pi - \frac{\pi}{6}$,

wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist. Hieraus erhält man

$$\theta = n\pi + \frac{\pi}{12} \text{ oder } n\pi + \frac{5\pi}{12}.$$

Setzt man $A + B = \frac{5\pi}{12}$, $A - B = \frac{\pi}{12}$,

dann ist $A = \frac{\pi}{4}$ und $B = \frac{\pi}{6}$, mithin

$$\theta = n\pi + A \pm B$$
$$= n\pi + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} = \left(n + \frac{1}{4} \pm \frac{1}{6}\right)\pi.$$

57) Aus der Gleichung

$$\sin x . \sqrt{3} = \sqrt{3} - \cos x$$

den Werth von x zu bestimmen.

Aus der gegebenen Gleichung erhält man

$$(1 - \sin x)\sqrt{3} = \cos x,$$

$$3 - 6\sin x + 3\sin^2 x = \cos^2 x$$

$$= 1 - \sin^2 x,$$

$$4\sin^2 x - 6\sin x = -2,$$

$$\sin^2 x - \tfrac{3}{2}\sin x + \tfrac{1}{2} = 0,$$

$$\sin x = 1 \text{ und } \tfrac{1}{2},$$

$$x = 90^0 \text{ und } 30^0.$$

58) Aus der Gleichung

$$\cot x \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x \cot 2x = 2$$

den Werth von x zu bestimmen.

Man setze

$$\operatorname{tg} 2x \cot x = y,$$

so ist $\operatorname{tg} x \cot 2x = \frac{1}{y}$

und $y - \frac{1}{y} = 2,$

$$y^2 - 2y - 1 = 0,$$

$$y = 1 \pm \sqrt{2},$$

oder

a) $\operatorname{tg} 2x \cot x = 1 + \sqrt{2},$

$$\frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1 + \sqrt{2} \quad (40)$$

$$(1 + \sqrt{2})\operatorname{tg}^2 x = \sqrt{2} - 1,$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$\operatorname{tg} x = \pm(\sqrt{2} - 1).$$

b) $\operatorname{tg} 2x \cot x = 1 - \sqrt{2}$

ergiebt nach ähnlicher Entwickelung

$$\operatorname{tg} x = \pm (\sqrt{2} + 1).$$

Es hat somit x vier Werthe: $22^0\,30'$; $157^0\,30'$; $67^0\,30'$ und $112^0\,30'$. (14).

59) Aus der Gleichung

$$2\sqrt{x^2 - x^4} = \sin A$$

soll der Werth von x bestimmt werden.

Durch Quadrirung der Gleichung erhält man

$$4x^2 - 4x^4 = \sin^2 A$$

$$x^4 - x^2 + \frac{\sin^2 A}{4} = 0,$$

$$x^2 = +\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1 - \sin^2 A}{4}}$$

$$= \frac{1 \pm \cos A}{2} = \cos^2 \frac{A}{2} \text{ oder } \sin^2 \frac{A}{2}$$

mithin $x = \pm \cos\frac{A}{2}$ oder $\pm \sin\frac{A}{2}$.

60) Den Werth des Winkels θ zu finden, für welchen $\theta = \cot\theta$ ist.

Aus $\theta = \cot\theta$ folgt

$$\theta \sin\theta = \cos\theta$$

oder

$$\theta\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \text{etc.}\right) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \text{etc.}\right) \quad (64 \text{ u. } 65)$$

und hieraus

$$1 - \frac{3\theta^2}{2} + \frac{5\theta^4}{24} - \frac{7\theta^6}{720} - \text{etc.} = 0 \ldots \quad (1).$$

Setzt man, um einen angenäherten Werth zu finden,

$$1 - \frac{3\theta^2}{2} + \frac{5\theta^4}{24} = 0,$$

so erhält man

$$\theta^2 = \frac{18 - \sqrt{204}}{5} = 0{,}74.$$

Wird dieser Werth Behufs der Erlangung eines genaueren Resultates auf der rechten Seite der Gleichung (1) substituirt, so erhält man

$$24 - 36\,\theta^2 + 5\,\theta^4 = \frac{7}{30} \cdot (0{,}74)^3 = 0{,}093,$$

woraus sich $\theta^2 = 0{,}7402$

$\theta = 0{,}86034$ bestimmt.

Die Reduction auf Grade ꝛc. ergiebt $\theta = 49^0\ 17'$.

61) Aus der Gleichung

$$arc\ sin\ vers\ (1 + x) - arc\ sin\ vers\ (1 - x) = arc\ tg\ 2\sqrt{1 - x^2}$$

soll der Werth von x bestimmt werden.

Setzt man

$$\text{arc sin vers } (1 + x) = \theta \ldots (A)$$

und $\text{arc sin vers } (1 - x) = \varphi, \ldots (B),$

so hat man $1 + x = \text{sin vers } \theta = 1 - \cos\theta,$

$1 - x = \text{sin vers } \varphi = 1 - \cos\varphi,$

folglich $x = \cos\varphi = -\cos\theta \ldots (C)$

oder $\varphi = \pi - \theta \ldots (D).$

Setzt man *(A)* und *(B)* in die gegebene Gleichung, so hat man

$$\theta - \varphi = \text{arc tg } 2\sqrt{1 - x^2},$$

$$\text{tg } (\theta - \varphi) = 2\sqrt{1 - x^2},$$

oder wegen *(D)*

$$\text{tg } [\theta - (\pi - \theta)] = 2\sqrt{1 - x^2} \ldots (E).$$

Nun ist wegen *(C)*

$$2\sqrt{1 - x^2} = 2\sin\theta,$$

folglich nach (*E*)

$$\operatorname{tg}[\theta - (\pi - \theta)] = 2\sin\theta$$

oder $\operatorname{tg} 2\theta = 2\sin\theta$

oder $\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = 2\sin\theta$

oder $\dfrac{2\sin\theta\,\cos\theta}{\cos 2\theta} = 2\sin\theta \ldots (F).$

Der Gleichung (*F*) wird genügt, wenn

$$2\sin\theta = 0 \ldots (G)$$

oder wenn $\cos\theta = \cos 2\theta \ldots (H)$

ist. Findet die Gleichung (*G*) statt, so ist

$$\sin\theta = 0,$$

$$\sqrt{1 - \cos\theta^2} = 0,$$

$$1 - \cos\theta^2 = 0$$

$$\cos\theta^2 = 1$$

$$x = -\cos\theta = \pm 1 \text{ [wegen } (C)\text{]}.$$

Findet dagegen (*H*) statt, so ist

$$\cos\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

oder wegen (*C*)

$$-x = 2x^2 - 1,$$

$$x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} = 0,$$

$$x = -\tfrac{1}{4} \pm \tfrac{3}{4},$$

$$x = \tfrac{1}{2} \text{ oder } -1.$$

62) Aus der Gleichung

$$\cot(\pi - 3x) = \operatorname{tg}(x - \pi)$$

den Werth von x zu bestimmen.

Aus der gegebenen Gleichung erhält man

$$-\cot 3x = -\operatorname{tg}(\pi - x) \quad (13),$$

$$\cot 3x = \operatorname{tg}(\pi - x),$$

$$= -\operatorname{tg} x.$$

Setzt man $\operatorname{tg} x = y$, so ist

$$\frac{3y^2 - 1}{y^3 - 3y} = -y \quad (40),$$

$$3y^2 - 1 = 3y^2 - y^4,$$

$$y^4 - 1 = 0,$$

$$(y^2 + 1)(y^2 - 1) = 0.$$

Setzt man $y^2 + 1 = 0$, so erhält man zwei imaginäre Wurzeln, setzt man hingegen

$$y^2 - 1 = 0,$$

so erhält man

$$y = \pm 1 = \operatorname{tg} x,$$

folglich $x = 45^0$ und 135^0.

63) Aus der Gleichung

$$\frac{\cot x - \sec x}{\cot x} = \frac{1}{16}$$

den Werth von x zu bestimmen.

Aus der gegebenen Gleichung erhält man

$$1 - \sec x \operatorname{tg} x = \frac{1}{16},$$

$$\sec x \operatorname{tg} x = \frac{15}{16},$$

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \operatorname{tg}^2 x = \frac{225}{256} \quad (6),$$

Setzt man $\operatorname{tg} x = y$, so ist

$$y^4 + y^2 - \frac{225}{256} = 0,$$

$$y^2 = \frac{9}{16} \text{ und } -\frac{25}{16}.$$

Sieht man von den maginären Werthen von y ab, so erhält man

$$y = \operatorname{tg} x = \pm \frac{3}{4}.$$

64) Aus der Gleichung

$$tg\,3\,\theta = sin\,6\,\theta$$

den Werth von θ zu bestimmen.

Setzt man $3\,\theta = \varphi$,

so ist $\operatorname{tg}\varphi = \sin 2\,\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$ (27),

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^3\varphi = 2\operatorname{tg}\varphi,$$

$$(\operatorname{tg}^2\varphi - 1)\operatorname{tg}\varphi = 0,$$

folglich ist $\operatorname{tg}\varphi = 0$ oder $\operatorname{tg}^2\varphi - 1 = 0$,

so daß man für $\operatorname{tg}\varphi$ die drei Werthe

$$0,\ 1 \text{ und } -1$$

erhält.

1. Fall. $\operatorname{tg}\varphi = 0 = \operatorname{tg} 3\,\theta$.

Setzt man $\operatorname{tg}\theta = x$, so ist

$$\frac{x^3 - 3\,x}{3\,x^2 - 1} = 0 \quad (40),$$

$$x^3 - 3\,x = 0,$$

$$x\,(x^2 - 3) = 0,$$

$$x = 0,\ x = +\sqrt{3},\ x = -\sqrt{3};$$

welchen Werthen die Winkel

$$0,\ 60^0 \text{ und } 120^0 \quad (18)$$

entsprechen.

2. Fall. $\operatorname{tg}\varphi = 1 = \operatorname{tg} 3\,\theta$.

Bei voriger Substitution erhält man

$$x^3 - 3\,x = 3\,x^2 - 1,$$

$$(x^3 + 1) - 3x\,(x + 1) = 0,$$

$$\{(x^2 - x + 1) - 3\,x\}\,(x + 1) = 0,$$

$$(x^2 - 4\,x + 1)\,(x + 1) = 0,$$

mithin $x + 1 = 0$ oder $x^2 - 4\,x + 1 = 0$,

woraus für x die Werthe erhalten worden

$$-1,\ 2 + \sqrt{3} \text{ und } 2 - \sqrt{3};$$

welchen die Winkel

$$135^0,\ 75^0 \text{ und } 15^0 \quad (19)$$

entsprechen.

3. Fall. $\operatorname{tg}\varphi = -1 = \operatorname{tg} 3\theta$.

Bei voriger Substitution erhält man

$$x^3 - 3x = 1 - 3x^2,$$
$$(x^3 - 1) + 3x(x-1) = 0,$$
$$\{(x^2 + x + 1) + 3x\}(x-1) = 0,$$
$$(x^2 + 4x + 1)(x - 1) = 0.$$

Die Lösung der Gleichungen

$$x - 1 = 0 \text{ und } x^2 + 4x + 1 = 0$$

giebt für x die drei Werthe

$$1,\ \sqrt{3} - 2 \text{ und } -2 - \sqrt{3},$$

welchen die drei Werthe von θ

$$45^0,\ 165^0 \text{ und } 105^0 \quad (19)$$

entsprechen. Es entsprechen mithin der gegebenen Gleichung 9 Werthe von θ, nämlich 0, 15^0, 45^0, 60^0, 75^0, 105^0, 120^0, 135^0 u. 165^0.

Drittes Kapitel.

Das rechtwinklige Dreieck.

65) Bezeichnen A und B die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist

$$\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2A} = \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B.$$

Es ist

$$\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2A} = \frac{2\sin(A+B)\sin(A-B)}{2\sin A\cos A} \quad (38) \text{ u. } (27)$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos A} \quad (49)$$

$$= \frac{\sin^2 A - \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \operatorname{tg} A - \cot A$$

$$= \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B.$$

66) Ist in einem Dreiecke

$$\cos A \cos B \sin C = \frac{\sin A + \sin B,}{\sec A + \sec B}$$

so ist dasselbe ein rechtwinkliges.

Es ist

$$\sin C = \frac{\sin A + \sin B}{\sec A \cos A \cos B + \sec B \cos B \cos A}$$

$$= \frac{\sin A + \sin B}{\cos B + \cos A}$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right) \quad (51)$$

$$= \cot \frac{C}{2},$$

$$2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}}.$$

$$2 \sin^2 \frac{C}{2} = 1$$

$$1 - \cos C = 1$$

$$\cos C = 0$$

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

67) Wenn in einem Dreiecke

$$1 + cot\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \frac{2}{1 - tg\,A}$$

$$\text{und } 4\triangle = c^2$$

ist, so ist das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig.

a) Es ist $1 - \operatorname{tg} A = \dfrac{2}{1 + \cot\left(\frac{\pi}{4} - B\right)}$

$$= \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + B\right)}$$

$$= \frac{2}{1 + \frac{1 + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} B}} \quad (52)$$

$$= \frac{2\,(1 - \operatorname{tg} B)}{1 - \operatorname{tg} B + 1 + \operatorname{tg} B}$$

$$= 1 - \operatorname{tg} B,$$

folglich $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B,\ A = B.$

b) Ist $\triangle = \dfrac{c^2}{4},$

so ist auch

$$\tfrac{1}{2}\, a^2 \sin C = \frac{c^2}{4}$$

$$\sin C = \frac{c^2}{2a^2};$$

nun ist aber, weil das Dreieck gleichschenklig ist,

$$\frac{c}{2a} = \sin\frac{C}{2},$$

folglich $\sin C = 2 \sin\dfrac{C}{2} \cos\dfrac{C}{2}$

$$= \frac{c}{a} \cos\frac{C}{2},$$

$$\text{oder } \frac{c^2}{2a^2} = \frac{c}{a} \cos \frac{C}{2}$$

$$\cos \frac{C}{2} = \frac{c}{2a},$$

$$\text{mithin } \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{C}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2},$$

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

68) In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist

$$2 \operatorname{cosec} 2A \cot B = \frac{c^2}{b^2}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{cosec} 2A \cot B &= (\cot A + \operatorname{tg} A) \cot B \quad (47) \\ &= (\operatorname{tg} B + \cot B) \cot B \\ &= \operatorname{tg} B \cot B = \cot^2 B \\ &= 1 + \cot^2 B \\ &= \operatorname{cosec}^2 B \quad (4) \\ &= \frac{c^2}{b^2}. \end{aligned}$$

69) In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist

$$\operatorname{tg} 2A - \sec 2B = \frac{b+a}{b-a}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2A - \sec 2B &= \operatorname{tg} 2A + \sec 2A \quad (12) \\ &= \frac{1 + \sin 2A}{\cos 2A} \\ &= \frac{(\cos A + \sin A)^2}{\cos^2 A - \sin^2 A} \quad (2), (27) \text{ u. } (31) \end{aligned}$$

$$=\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}$$

$$=\frac{\frac{b}{c}+\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}-\frac{a}{c}}$$

$$=\frac{b+a}{b-a}.$$

70) Die Cotangenten der halben Winkel eines Dreiecks sind drei auf einander folgende ganze Zahlen, es soll die Natur des Dreiecks und das Verhältniß seiner Seiten ermittelt werden.

Es mögen $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ bezüglich

durch $x+1$, x, $x-1$ bezeichnet werden,

so ist, weil $\cot\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{B}{2}$,

$$\frac{(x+1)(x-1)-1}{(x+1)+(x-1)}=\frac{1}{x} \quad (39),$$

$$\frac{x^2-2}{2x}=\frac{1}{x},$$

$$x^2-2=2,$$

$$x^2=4,$$

$$x=\pm 2.$$

Das Minuszeichen ist hier außer Acht zu lassen, weil negative Werthe von x für die halben Dreieckswinkel stumpfe Winkel ergeben würden, was unmöglich ist. Man hat also nur den Werth

$$x=2,$$

und deshalb $\cot\frac{C}{2}=x-1=1=\cot\frac{\pi}{4}$,

$$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{4},\ C=\frac{\pi}{2}.$$

Das Dreieck ist also ein rechtwinkliges.

$$\text{Da } \cot\frac{B}{2} = 2,$$

$$\text{so ist } \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{und } \operatorname{tg} B = \frac{2\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}} \quad (40)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4}{3};$$

$$\text{oder } \frac{a}{b} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Nun ist } \frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

$$= 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16},$$

$$\frac{c}{a} = \frac{5}{4}.$$

71) **Im rechtwinkligen Dreieck ist $a + b = s$ und A gegeben, das Dreieck ist zu berechnen.**

Es ist

$$a = c \sin A$$
$$b = c \cos A$$
$$s = c(\sin A + \cos A),$$

$$c = \frac{s}{\sin A + \cos A}$$

$$= \frac{s}{\cos(A - 45)\sqrt{2}}. \quad (37)$$

hieraus

$$a = c \sin A = \frac{s \sin A}{\cos(A - 45)\sqrt{2}},$$

$$b = \frac{s \cos A}{\cos (A - 45) \sqrt{2}}$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2} ab = \frac{s^2 \sin 2A}{8 \cos^2 (A - 45)}.$$

72) Im rechtwinkligen Dreieck ist $a - b = d$ und A gegeben, das Dreieck ist zu berechnen.

Durch ähnliche Herleitung erhält man

$$c = \frac{d}{\sin (A - 45) \sqrt{2}},$$

$$a = \frac{d \sin A}{\sin (A - 45) \sqrt{2}},$$

$$b = \frac{d \cos A}{\sin (A - 45) \sqrt{2}},$$

$$\triangle = \frac{d^2 \sin 2A}{8 \sin^2 (A - 45)}.$$

73) Im rechtwinkligen Dreieck ist $b + c = s$ und A gegeben, das Dreieck soll berechnet werden.

Es ist

$$b = c \cos A$$

$$\frac{c = c}{s = c(1 + \cos A)},$$

$$c = \frac{s}{1 + \cos A}$$

$$= \frac{s}{2 \cos^2 \frac{A}{2}} \quad (42);$$

$$a = c \sin A$$

$$= \frac{s \sin A}{2 \cos^2 \frac{A}{2}}$$

$$= s \operatorname{tg} \frac{A}{2} \quad (27);$$

$$b = \frac{s \cos A}{2 \cos^2 \frac{A}{2}} = s \cot A \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2} ab = \frac{s^2 \sin 2A}{16 \cos^4 \frac{A}{2}} = \tfrac{1}{2} s^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \cot A.$$

74) Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn $b - c = d$ und A gegeben sind.

Man findet durch ähnliche Herleitung

$$c = \frac{d}{2 \sin^2 \frac{A}{2}};$$

$$a = d \cot \frac{A}{2};$$

$$b = \frac{d \cos A}{2 \sin^2 \frac{A}{2}} = d \cot \frac{A}{2} \cot A;$$

$$\triangle = \frac{d^2 \sin 2A}{16 \sin^4 \frac{A}{2}} = \tfrac{1}{2} d^2 \cot^2 \frac{A}{2} \cot A.$$

75) Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Summe aller drei Seiten $(a + b + c = s)$ und einem Winkel (A) zu berechnen.

Es ist

$$a = c \sin A$$

$$b = c \cos A$$

$$c = c$$

$$s = c(1 + \cos A + \sin A),$$

$$c = \frac{s}{1 + \cos A + \sin A}$$

$$\frac{s}{2\cos^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} \quad (42) \text{ u. } (27)$$

$$=\frac{s}{2\cos\frac{A}{2}\cos\left(45-\frac{A}{2}\right)\sqrt{2}};$$

$$a=c\sin A=\frac{s\sin\frac{A}{2}}{\cos\left(45-\frac{A}{2}\right)\sqrt{2}} \quad (27);$$

$$b=\frac{s\cos A}{2\cos\frac{A}{2}\cos\left(45-\frac{A}{2}\right)\sqrt{2}},$$

$$\triangle=\tfrac{1}{2}ab=\frac{s^2\sin 2A}{16\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\left(45-\frac{A}{2}\right)}.$$

76) Der Ueberschuß der Kathetensumme über die Hypotenuse $(a+b-c=d)$ und ein Winkel (A) sind im rechtwinkligen Dreieck gegeben, es soll berechnet werden.

Durch analoge Herleitung erhält man

$$c=\frac{d}{2\sin\frac{A}{2}\sin\left(45-\frac{A}{2}\right)\sqrt{2}};$$

$$a=\frac{d\cos\frac{A}{2}}{\sin\left(45-\frac{A}{2}\right)\sqrt{2}};$$

$$b=\frac{d\cos A}{2\sin\frac{A}{2}\sin\left(45-\frac{A}{2}\right)\sqrt{2}},$$

$$\triangle=\frac{d^2\sin 2A}{16\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\left(45-\frac{A}{2}\right)}.$$

77) Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse (c) und der Summe beider Katheten $(a + b = s)$ zu berechnen.

Es ist

$$a = c \sin A$$

$$b = c \cos A$$

$$s = c (\sin A + \cos A)$$

$$= c \cos (A - 45) \sqrt{2} = c \sin (A + 45) \sqrt{2},$$

$$\cos (A - 45) \text{ oder } \sin (A + 45) = \frac{s}{c\sqrt{2}}$$

$$= \frac{s\sqrt{2}}{2c}.$$

Um a durch s und c zu bestimmen,

hat man $a^2 + b^2 = c^2$

oder, weil $b = s - a$,

$$a^2 + (s - a)^2 = c^2,$$

$$a^2 - as + \frac{s^2 - c^2}{2} = 0,$$

$$a = \frac{s \pm \sqrt{2c^2 - s^2}}{2}.$$

Denselben Werth erhält man für b, folglich

ist $a = \frac{1}{2} (s + \sqrt{2c^2 - s^2})$

und $b = \frac{1}{2} (s - \sqrt{2c^2 - s^2})$.

Um den Inhalt $\triangle$ zu bestimmen, hat man

$$\triangle = \tfrac{1}{2} ab = \tfrac{1}{8} (s + \sqrt{2c^2 - s^2}) (s - \sqrt{2c^2 - s^2})$$

$$= \tfrac{1}{4} (s^2 - c^2)$$

$$= \tfrac{1}{4} (s + c) (s - c).$$

78) Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse (c) und der Differenz beider Katheten $(a - b = d)$ zu berechnen.

Man erhält durch analoge Herleitung

$$\sin(A - 45) = \frac{d\sqrt{2}}{2c};$$

$$a = \tfrac{1}{2}(d + \sqrt{2c^2 - d^2});$$

$$b = \tfrac{1}{2}(-d + \sqrt{2c^2 - d^2});$$

$$\triangle = \tfrac{1}{4}(c + d)(c - d).$$

79) Ein rechtwinkliges Dreieck aus den durch die Höhe gebildeten Abschnitten der Hypotenuse $(c_1$ und $c_2)$ zu berechnen.

Nennt man die aus der Spitze des rechten Winkels gefällte Höhe x und den an c_2 liegenden spitzen Winkel A, so ist

$$x = c_2 \operatorname{tg} A = c_1 \cot A,$$

$$\operatorname{tg} A = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}.$$

$$a = \sqrt{c_1(c_1 + c_2)};$$

$$b = \sqrt{c_2(c_1 + c_2)};$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)\sqrt{c_1 c_2}.$$

Beispiel. Gegeben: $c_1 = 15$; $c_2 = 21$.

1) $\operatorname{tg} A = \sqrt{\frac{15}{21}}$.

$\log 15 = 1{,}1760913$
$\log 21 = 1{,}3222193$

$\log \frac{15}{21} = 19{,}8538720 - 20$

2)

$\log \operatorname{tg} A = 9{,}9269360 - 10$
$A = 40^0\ 12'\ 10'',7.$

$$2)\ a = \sqrt{15.\ 36.}$$

$$\begin{aligned} \log 15 &= 1,1760913 \\ \log 36 &= 1,5563025 \\ \hline & \ 2,7323938 \\ & 2) \overline{} \\ \log a &= 1,3661969 \\ a &= 23,2379. \end{aligned}$$

$$3)\ b = \sqrt{21.\ 36.}$$

$$\begin{aligned} \log 21 &= 1,3222193 \\ \log 36 &= 1,5563025 \\ \hline & \ 2,8785218 \\ & 2) \overline{} \\ \log b &= 1,4392609 \\ b &= 27,4954. \end{aligned}$$

$$4)\ \triangle = 18 \sqrt{15.\ 21.}$$

$$\begin{aligned} \log 15 &= 1,1760913 \\ \log 21 &= 1,3222193 \\ \hline & \ 2,4983106 \\ & 2) \overline{} \\ & \ 1,2491553 \\ \log 18 &= 1,2552725 \\ \hline \log \triangle &= 2,5044278 \\ \triangle &= 319,468. \end{aligned}$$

80) **Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse (c) und der Differenz ihrer Höhenabschnitte $(c_1 - c_2 = d)$ zu berechnen.**

Wird wieder c_2 als am spitzen Winkel A anliegend angenommen, so ist

$$\begin{aligned} a^2 &= c_1\, c \\ b^2 &= c_2\, c \\ \hline a^2 - b^2 &= (c_1 - c_2)\, c \\ &= d c \end{aligned}$$

$$\text{und}\quad \begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ \hline 2\, a^2 &= c\,(d + c); \\ 2\, b^2 &= c\,(c - d); \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{\frac{c(c+d)}{2}}.$$

$$b = \sqrt{\frac{c(c-d)}{2}}.$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{c+d}{c-d}}.$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{4}c\sqrt{(c+d)(c-d)}.$$

Beispiel: $c = 36$, $d = 6$.
$A = 49^\circ\, 47'\, 49'', 3.$
$a = 27{,}4954$
$b = 23{,}2379$
$\triangle = 319{,}468.$

81) Ein rechtwinkliges Dreieck aus den an die Mittelpunkte der Katheten von den Scheiteln der Gegenwinkel gezogenen Transversalen (t_1 und t_2) zu berechnen.

Leicht ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{a^2}{4} + b^2 = t_1^{\,2},$$

$$a^2 + \frac{b^2}{4} = t_2^{\,2}$$

$$4a^2 + b^2 = 4t_2^{\,2}$$

$$4a^2 - \frac{a^2}{4} = 4t_2^{\,2} - t_1^{\,2}$$

$$\frac{15}{4}a^2 = (2t_2 + t_1)(2t_2 - t_1)$$

$$a = 2\sqrt{\frac{(2t_2 + t_1)(2t_2 - t_1)}{15}}.$$

Analog erhält man

$$b = 2\sqrt{\frac{(2t_1 + t_2)(2t_1 - t_2)}{15}}.$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{(2t_2 + t_1)(2t_2 - t_1)}{(2t_1 + t_2)(2t_1 - t_2)}}.$$

Beispiel: Gegeben: $t_1 = \sqrt{193}$; $t_2 = \sqrt{588{,}25}$.

$a = 24.$

$b = 7$

$A = 73^0\ 44'\ 23'',3.$

82) Ein rechtwinkliges Dreieck aus dem Radius des eingeschriebenen Kreises (r) und einem Winkel (A) zu berechnen.

Leicht ergeben sich die Gleichungen

$$b = r + r \cot \frac{A}{2};$$

$$a = r + r \cot \left(45^0 - \frac{A}{2}\right);$$

folglich ist $b = r\left(1 + \cot \frac{A}{2}\right)$

$$= \frac{r\left(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{r \sin\left(45^0 + \frac{A}{2}\right)\sqrt{2}}{\sin \frac{A}{2}} \qquad (43)$$

und $a = r\left[1 + \cot\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)\right]$

$$= \frac{r\left[\sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right) + \cos\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)\right]}{\sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)}$$

$$= \frac{r \sin\left(90^0 - \frac{A}{2}\right)\sqrt{2}}{\sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)} \quad (43)$$

$$= \frac{r \cos\frac{A}{2}\sqrt{2}}{\sin\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)}.$$

Man kann auch folgenden Weg einschlagen:

$$b = r\left(1 + \cot\frac{A}{2}\right)$$

$$= r\left(\cot 45^0 + \cot\frac{A}{2}\right)$$

$$= r. \frac{\sin\left(45^0 + \frac{A}{2}\right)}{\sin 45^0 \sin\frac{A}{2}} \quad (46)$$

$$= r. \frac{\sin\left(45^0 + \frac{A}{2}\right) \operatorname{cosec} 45^0}{\sin\frac{A}{2}} \quad (6)$$

$$= \frac{r \sin\left(45^0 + \frac{A}{2}\right)\sqrt{2}}{\sin\frac{A}{2}} \quad (9)$$

Beispiel. Gegeben: $r = 78$, $A = 35^0\ 3'\ 4'',1$.

$a = 228,$

$b = 325,$

$c = 397,$

$\triangle = 37050.$

83) Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn der Radius des eingeschriebenen Kreises (r) und eine Kathete (a) gegeben ist.

Ist b die andere Kathete und c die Hypotenuse, so ist

$$a + b - c = 2r$$

$$\text{oder } a - 2r = c - b \ldots (\alpha),$$

nun ist aber

$$a^2 = c^2 - b^2,$$

$$\text{folglich } \frac{a^2}{a - 2r} = \frac{c^2 - b^2}{c - b} = c + b \ldots (\beta).$$

Subtrahirt man (α) von (β), so erhält man

$$2b = \frac{a^2}{a - 2r} - (a - 2r)$$

$$= \frac{4r(a - r)}{a - 2r},$$

$$b = \frac{2r(a - r)}{a - 2r}$$

$$\text{und } \operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{a(a - 2r)}{2r(a - r)}$$

Viertes Kapitel.

Tafel pythagoräischer Dreiecke.

Zahlreiche Zahlenbeispiele für die vorhergehenden Aufgaben bietet nachfolgende Tabelle dar.

No.	*a*	*b*	*c*	½ *ab*	*A*	*B*
1	4	3	5	6	53° 7′ 48″, 4	36° 52′ 11″, 6
2	12	5	13	30	67 22 48, 5	22 37 11, 5
3	8	15	17	60	28 4 20, 9	61 55 39, 1
4	24	7	25	84	73 44 23, 3	16 15 36, 7
5	20	21	29	210	43 36 10, 1	46 23 49, 9
6	40	9	41	180	77 19 10, 6	12 40 49, 4
7	12	35	37	210	18 55 28, 7	71 4 31, 3
8	60	11	61	330	79 36 40, 0	10 23 20, 0
9	28	45	53	630	31 53 26, 8	58 6 33, 2
10	56	33	65	924	59 29 23, 2	30 30 36, 8
11	84	13	85	546	81 12 9, 3	8 47 50, 7
12	16	63	65	504	14 15 0, 1	75 44 59, 9
13	48	55	73	1320	41 6 43, 5	48 53 16, 5
14	80	39	89	1560	64 0 38, 8	25 59 21, 2
15	112	15	113	840	82 22 18, 7	7 37 41, 3
16	36	77	85	1386	25 3 27, 4	64 56 32, 6
17	72	65	97	2340	47 55 29, 9	42 4 30, 1
18	144	17	145	1224	83 16 1, 5	6 43 58, 5
19	20	99	101	990	11 25 16, 3	78 34 43, 7
20	60	91	109	2730	33 23 54, 6	56 36 5, 4
21	140	51	149	3570	69 59 2, 5	20 0 57, 5
22	180	19	181	1710	83 58 27, 9	6 1 32, 1
23	44	117	125	2574	20 36 34, 9	69 23 25, 1
24	88	105	137	4620	39 57 58, 4	50 2 1, 6
25	132	85	157	5610	57 13 15, 3	32 46 44, 7
26	176	57	185	5016	72 3 17, 1	17 56 42, 9
27	220	21	221	2310	84 32 50, 5	5 27 9, 5
28	24	143	145	1716	9 31 38, 2	80 28 21, 8
29	120	119	169	7140	45 14 23, 0	44 45 37, 0
30	168	95	193	7980	60 30 46, 4	29 29 13, 6
31	264	23	265	3036	85 1 15, 3	4 58 44, 7
32	52	165	173	4290	17 29 32, 4	72 30 27, 6
33	104	153	185	7956	34 12 19, 6	55 47 40, 4
34	156	133	205	10374	49 33 1, 0	40 26 59, 0
35	208	105	233	10920	63 12 54, 0	26 47 6, 0
36	260	69	269	8970	75 8 13, 8	14 51 46, 2
37	312	25	313	3900	85 25 7, 6	4 34 52, 4
38	28	195	197	2730	8 10 16, 4	81 49 43, 6
39	84	187	205	7854	24 11 22, 3	65 48 37, 7
40	140	171	221	11970	39 18 27, 5	50 41 32, 5
41	252	115	277	14490	65 28 13, 6	24 31 46, 4
42	308	75	317	11550	76 18 52, 0	13 41 8, 0
43	364	27	365	4914	85 45 28, 1	4 14 31, 9
44	60	221	229	6630	15 11 21, 4	74 48 38, 6

No.	*a*	*b*	*c*	½ *ab*	*A*	*B*
45	120	209	241	12540	29° 51′ 46″, 0	60° 8′ 14″, 0
46	240	161	289	19320	56 8 41, 9	33 51 18, 1
47	420	29	421	6090	86 3 0, 4	3 56 59, 6
48	32	255	257	4080	7 9 9, 6	82 50 50, 4
49	96	247	265	11856	21 14 21, 5	68 45 38, 5
50	160	231	281	18480	34 42 29, 0	55 17 31, 0
51	224	207	305	23184	47 15 31, 5	42 44 28, 5
52	288	175	337	25200	58 42 55, 8	31 17 4, 2
53	352	135	377	23760	69 1 1, 4	20 58 58, 6
54	416	87	425	18096	78 11 15, 8	11 48 44, 2
55	480	31	481	7440	86 18 17, 2	3 41 42, 8
56	68	285	293	9690	13 25 10, 8	76 34 49, 2
57	136	273	305	18564	26 28 51, 7	63 31 8, 3
58	204	253	325	25806	38 52 48, 3	51 7 11, 7
59	272	225	353	30600	50 24 8, 1	39 35 51, 9
60	340	189	389	32130	60 55 51, 9	29 4 8, 1
61	408	145	433	29580	70 26 6, 7	19 33 53, 3
62	476	93	485	22134	78 56 41, 7	11 3 18, 3
63	544	33	545	8976	86 31 42, 9	3 28 17, 1
64	36	323	325	5814	6 21 34, 8	83 38 25, 2
65	180	299	349	26910	31 2 53, 6	58 57 6, 4
66	252	275	373	34650	42 30 3, 6	47 29 56, 4
67	396	203	445	40194	62 51 32, 9	27 8 27, 1
68	468	155	493	36270	71 40 31, 1	18 19 28, 9
69	612	35	613	10710	86 43 36, 6	3 16 23, 4
70	76	357	365	13566	12 1 4, 9	77 58 55, 1
71	152	345	377	26220	23 46 38, 3	66 13 21, 7
72	228	325	397	37050	35 3 4, 1	54 56 55, 9
73	304	297	425	45144	45 40 2, 3	44 19 57, 7
74	380	261	461	49590	55 31 1, 5	34 28 58, 5
75	456	217	505	49476	64 33 4, 6	25 26 55, 4
76	532	165	557	43890	72 46 7, 3	17 13 52, 7
77	608	105	617	31920	80 12 6, 5	9 57 53, 5
78	684	37	685	12654	86 54 13, 3	3 5 46, 7
79	40	399	401	7980	5 43 29, 3	84 16 30, 7
80	120	391	409	23460	17 3 41, 5	72 56 18, 5
81	280	351	449	49140	38 34 48, 3	51 25 11, 7
82	360	319	481	57420	48 27 19, 7	41 32 40, 3
83	440	279	521	61380	57 37 17, 7	32 22 42, 3
84	520	231	569	60060	66 2 51, 9	23 57 8, 1
85	680	111	689	37740	80 43 44, 6	9 16 15, 4
86	760	39	761	14820	87 3 44, 6	2 56 15, 4
87	84	437	445	18354	10 52 50, 4	79 7 9, 6
88	168	425	457	35700	21 34 6, 9	68 25 53, 1

No.	a	b	c	½ ab	A	B
89	336	377	505	63336	41°42′32″,1	48°17′27″,9
90	420	341	541	71610	50 55 36, 1	39 4 23, 9
91	672	185	697	62160	74 36 28, 4	15 23 31, 6
92	840	41	841	17220	87 12 20, 3	2 47 39, 7
93	44	483	485	10626	5 12 18, 4	84 47 41, 9
94	132	475	493	31350	15 31 49, 2	74 28 10, 8
95	220	459	509	50490	25 36 30, 7	64 23 29, 3
96	308	435	533	66990	35 18 0, 9	54 41 59, 1
97	396	403	565	79794	44 29 53, 0	45 30 7, 0
98	572	315	653	90090	61 9 30, 4	28 50 29, 6
99	660	259	709	85470	68 34 25, 5	21 25 34, 5
100	748	195	773	72930	75 23 18, 5	14 36 41, 5
101	836	123	845	51414	81 37 48, 6	8 22 11, 4
102	924	43	925	19866	87 20 8, 0	2 39 52, 0
103	92	525	533	24150	9 56 22, 1	80 3 37, 9
104	184	513	545	47196	19 43 53, 8	70 16 6, 2
105	276	493	565	68034	29 14 30, 3	60 45 29, 7
106	368	465	593	85560	38 21 28, 8	51 38 31, 2
107	460	429	629	98670	46 59 49, 7	43 0 10, 3
108	552	385	673	106260	55 6 20, 2	34 53 39, 8
109	644	333	725	107226	62 39 26, 6	27 20 33, 4
110	736	273	785	100464	69 38 56, 3	20 21 3, 7
111	828	205	853	84870	76 5 38, 7	13 54 21, 3
112	920	129	929	59340	82 1 5, 4	7 58 54, 6
113	1012	45	1013	22770	87 27 14, 2	2 32 45, 8
114	48	575	577	13800	4 46 18, 8	85 13 41, 2
115	240	551	601	66120	23 32 11, 7	66 27 48, 3
116	336	527	625	88536	32 31 13, 5	57 28 46, 5
117	528	455	697	120120	49 14 49, 7	40 45 10, 3
118	624	407	745	126984	56 53 9, 1	33 06 50, 9
119	816	287	865	117096	70 37 20, 8	19 22 39, 2
120	912	215	937	98040	76 44 5, 9	13 15 54, 1
121	1104	47	1105	25944	87 33 44, 1	2 26 15, 9
122	100	621	629	31050	9 8 52, 3	80 51 7, 7
123	200	609	641	60900	18 10 50, 0	71 49 10, 0
124	300	589	661	88350	26 59 29, 3	63 0 30, 7
125	400	561	689	112200	35 29 21, 6	54 30 38, 4
126	600	481	769	144300	51 16 55, 2	38 43 4, 8
127	700	429	821	150150	58 29 51, 5	31 30 8, 5
128	800	369	881	147600	65 14 18, 6	24 45 41, 4
129	900	301	949	135450	71 30 28, 0	18 29 32, 0
130	1100	141	1109	77550	82 41 44, 0	7 18 16, 0
131	1200	49	1201	29400	87 39 42, 2	2 20 17, 8

Fünftes Kapitel.

Das schiefwinklige Dreieck.

84) Sind A, B, C die Winkel eines Dreiecks, so ist

$$\frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}=\frac{\sin B}{\sin A}.$$

Es ist

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A+B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A+B}{2}},$$

$$=\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A+B}{2}};$$

auf ähnliche Weise erhält man

$$\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2}},$$

folglich ist

$$\frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}.$$

85) Wenn in einem Dreiecke

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$$

ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Es ist

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 C$$
$$= \sin^2 (A + B),$$

folglich

$$\sin (A + B) \sin (A - B) = \sin^2 (A + B), \quad (49)$$
$$\sin (A - B) = \sin (A + B)$$
$$A - B = \pi - (A + B)$$
$$A = \frac{\pi}{2}.$$

86) In jedem Dreiecke ist

$$tg\, A + tg\, B + tg\, C = tg\, A\, tg\, B\, tg\, C.$$

Es ist

$$\sin (A + B + C)$$
$$= \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C$$
$$- \sin A \sin B \sin C \ldots \quad (53),$$

oder, weil $\sin (A + B + C) = 0$ ist,

$$\sin A \sin B \sin C.$$
$$= \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C.$$

Dividirt man beide Seiten durch $\cos A \cos B \cos C$, so erhält man

$$tg\, A\, tg\, B\, tg\, C = tg\, A + tg\, B + tg\, C.$$

Zusatz. In jedem Dreiecke ist

$$\cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C = 1.$$

Nach vorigem Satze ist

$$tg\, A + tg\, B + tg\, C = tg\, A\, tg\, B\, tg\, C,$$

dividirt man beide Seiten durch $tg\, A\, tg\, B\, tg\, C$, so erhält man die obige Formel.

87) In jedem Dreiecke ist

$$cot \frac{A}{2} + cot \frac{B}{2} + cot \frac{C}{2} = cot \frac{A}{2} \, cot \frac{B}{2} \, cot \frac{C}{2}.$$

Es ist s. Aufg 70.

$$\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$- \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (54)$$

und $\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 0,$

folglich

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

und wenn man beide Seiten durch

$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ dividirt:

$$\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{A}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

88) In jedem Dreiecke ist

$$sin\ A + sin\ B + sin\ C = 4 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Es ist

$$\sin A + \sin B + \sin C$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B) \quad (35)$$

$$= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2}\right) \quad (27)$$

$$= 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \quad (1) \text{ und } (25).$$

Der Satz läßt sich auch so beweisen:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{2\triangle}{bc} + \frac{2\triangle}{ac} + \frac{2\triangle}{ab}$$

$$= 4 \frac{S\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{abc} \quad (57)$$

$$= 4 \sqrt{\frac{S^3 (S-a)(S-b)(S-c)}{a^2 b^2 c^2}}$$

$$= 4 \sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{S(S-b)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{S(S-c)}{ab}}$$

$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad (59).$$

89) Sind A, B, C, die Winkel eines Dreiecks, so ist

$$\cos nA + \cos nB + \cos nC = 1 \pm 4 \sin \frac{nA}{2} \sin \frac{nB}{2} \sin \frac{nC}{2}$$

$$\text{oder} = -1 \pm 4 \cos \frac{nA}{2} \cos \frac{nB}{2} \cos \frac{nC}{2}$$

jenachdem n ungerade oder gerade ist.

Ist n gerade, so ist

$$\cos nA + \cos nC = 2 \cos \frac{n(A+C)}{2} \cos \frac{n(A-C)}{2} \quad (37),$$

$$\cos nB = \cos n(A+C) = -1 + 2\cos^2 \frac{n(A+C)}{2} \quad (42),$$

folglich

$$\cos nA + \cos nB + \cos nC$$

$$= -1 + 2\cos\frac{n(A+C)}{2}\left\{\cos\frac{n(A-C)}{2} + \cos\frac{n(A+C)}{2}\right\}$$

$$= -1 + 4\cos\frac{n(A+C)}{2}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nC}{2} \quad (25)$$

$$= -1 + 4\cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{nB}{2}\right)\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nC}{2}$$

$$= -1 + 4\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2} \quad (26) \text{ u. } (8)$$

$$= -1 + 4(-1)^{\frac{n}{2}}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2} \quad (9)$$

Ist n ungerade, so ist

$$\cos nA + \cos nC = 2\cos\frac{n(A+C)}{2}\cos\frac{n(A-C)}{2} \quad (37)$$

$$\text{und } \cos nB = \cos[n\pi - n(A+C)]$$

$$= -\cos n(A+C)$$

$$= 1 - 2\cos^2\frac{n(A+C)}{2} \quad (42);$$

folglich $\cos nA + \cos nB + \cos nC$

$$= 1 + 2\cos\frac{n(A+C)}{2}\left\{\cos\frac{n(A-C)}{2} - \cos\frac{n(A+C)}{2}\right\}$$

$$= 1 + 4\cos\frac{n(A+C)}{2}\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nC}{2} \quad (26)$$

$$= 1 + 4\cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{nB}{2}\right)\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nC}{2}$$

$$= 1 + 4\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2}$$

$$= 1 + 4(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2}.$$

Zusätze:

a) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

b) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Es ist

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}(3+\cos A+\cos B+\cos C)\quad(42)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(4+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\text{ wegen } a)$$

$$=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

90) In jedem Dreiecke ist

$$\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Es ist

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$$

$$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C\quad(35)\text{ u. }(37)$$

$$=2\sin C\,[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

$$=4\sin A\sin B\sin C\quad(26);$$

folglich

$$\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{4\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{4\sin A\sin B\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\quad(\S\ 88.)$$

$$=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad(27.)$$

Zusatz. In jedem Dreiecke ist

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

91) In jedem Dreiecke ist

$$\frac{S^3}{abc} = \frac{cot\frac{A}{2} + cot\frac{B}{2} + cot\frac{C}{2}}{sec\frac{A}{2}\, sec\frac{B}{2}\, sec\frac{C}{2}},$$

wo S wieder die halbe Summe der Seiten bezeichnet.

Es ist

$$\frac{a+b+c}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

$$= \frac{\sin A}{\sin A} + \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$= \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A}$$

$$= \frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} \quad (\S.\ 88.)$$

$$= \frac{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}};$$

auf ähnliche Weise erhält man

$$\frac{a+b+c}{b} = \frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$$

und

$$\frac{a+b+c}{c} = \frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},$$

mithin ist

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} = \frac{2^3\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\text{oder } \frac{S^3}{abc} = \frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}}{\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}} \quad (\S.\ 87).$$

92) Wenn für ein Dreieck die Gleichungen

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = c^2$$

$$\text{und } \sin A \sin B = \sin^2 C$$

Statt haben, so ist das Dreieck ein gleichseitiges.

Nach Voraussetzung ist

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)\, c^2 + c^3,$$

$$\text{also } c^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b}$$

$$= a^2 - ab + b^2;$$

ferner ist

$$\frac{c^2}{ab} = \frac{\sin^2 C}{\sin A \sin B}$$

$$= 1,$$

$$\text{mithin } ab = c^2 = a^2 - ab + b^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0,$$

$$a = b,$$

$$\text{und } c^2 = ab = a^2 = b^2,$$

$$c = a = b.$$

93) Bezeichnen R und r bezüglich die Radien der um und in ein Dreieck beschriebenen Kreise, so ist

$$R = \frac{r}{4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}.$$

Leicht ergiebt sich

$$a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

oder $$2\,R \sin A = \frac{r.\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \quad (64)\text{ u. }(46.)$$

$$4\,R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{r.\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \quad (27)\text{ u. }(1.)$$

$$R = \frac{r}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Bezeichnen r', r'', r''', die Radien der drei äußeren Berührungskreise eines Dreiecks, so ergeben sich auf ganz analoge Weise folgende.

Zusätze: a) $$R = \frac{r'}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

b) $$R = \frac{r''}{4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

c) $$R = \frac{r'''}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

94) Bei voriger Bezeichnung ist in jedem Dreiecke

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r' + r'' + r'''}{R} - 3.$$

Mit Rücksicht auf §. 93, Zusatz, hat man nur zu zeigen, daß

$$4\left[\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right.$$
$$\left. + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right] = 3 + \cos A + \cos B + \cos C$$

ist. Nun ist der eingeklammerte Ausdruck der linken Seite

$$= \sin\frac{A+B+C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (53),$$

folglich, wenn die ganze linke Seite mit L bezeichnet wird,

$$L = 4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (8)$$

$$= 4 + \cos A + \cos B + \cos C - 1 \quad (\S.\ 89)$$

$$= 3 + \cos A + \cos B + \cos C.$$

95) In jedem Dreiecke ist

$$\frac{r' + r'' + r'''}{2R} = \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}.$$

Nach §. 94 ist

$$\frac{r' + r'' + r'''}{2R} = \tfrac{1}{2}(3 + \cos A + \cos B + \cos C)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \quad (\S.\ 89.\ \text{Zus.}\ a)$$

$$= 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \quad (\S.\ 89.\ \text{Zus.}\ b).$$

96) In jedem Dreiecke ist

$$r' + r'' + r''' = r + 4R.$$

Nach dem Beweise zu vorigem Satze ist

$$\frac{r' + r'' + r'''}{2R} = \tfrac{1}{2}\left(4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(4 + \frac{r}{R}\right) \quad (\S.\ 93),$$

mithin $r' + r'' + r''' = 4R + r.$

97) In jedem Dreiecke ist

$$\frac{R+r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C.$$

Nach §. 94 ist

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r' + r'' + r'''}{R} - 3$$

$$= \frac{r + 4R}{R} - 3 \quad (§.\ 96)$$

$$= \frac{r + R}{R}.$$

98) Ist h die in einem Dreiecke zur Seite a gehörige Höhe, so ist

$$h = 2R \sin B \sin C.$$

Es ist

$$h = b \sin C$$

$$= 2R \sin B \sin C \quad (64).$$

99) In jedem Dreiecke ist der Inhalt

$$\triangle = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Es ist

$$\triangle = \tfrac{1}{2} h a$$

$$= \tfrac{1}{2} .\ 2R \sin B \sin C .\ 2R \sin A \quad (§.\ 98 \text{ u. } 64)$$

$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

100) In jedem Dreiecke ist

$$\triangle = 4Rr \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

Es ist

$$\triangle = \tfrac{1}{2} r (a + b + c)$$

$$= Rr (\sin A + \sin B + \sin C) \quad (64)$$

$$= 4Rr \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \quad (§.\ 88).$$

101) Der Abschnitt einer Höhe im Dreiecke, welcher zwischen der Winkelspitze und dem Durchschnittspunkte der drei Höhen liegt, ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises in den Cosinus des Winkels, von dessen Spitze aus die Höhe gezogen wurde.

Behaupt. In Fig. 1 ist

$$AG = 2R \cos A,\ BG = 2R \cos B,\ CG = 2R \cos C.$$

Da $\triangle AGE \sim \triangle ADC$, so ist

$$AG : AE = AC : AD,$$

folglich
$$AG = \frac{AE.\ AC}{AD}$$
$$= \frac{bc \cos A}{AD}$$
$$= \frac{2R.\ 2R \sin B \sin C \cos A}{AD} \quad (64)$$
$$= 2R \cos A \quad (§.\ 98).$$

102) Der Abschnitt einer Höhe zwischen der Grundlinie und dem Höhendurchschnitte ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises und der Cosinussen der an der Grundlinie liegenden Winkel.

Behaupt. In Fig. 1 ist

$$DG = 2R \cos B \cos C,\ EG = 2R \cos A \cos C,$$
$$FG = 2R \cos A \cos B.$$

Es ist

$$AD = 2R \sin B \sin C \quad (§.\ 98)$$

und
$$AG = 2R \cos A \ (§.\ 101)$$

folglich
$$DG = 2R (\sin B \sin C - \cos A)$$
$$= 2R [\sin B \sin C + \cos (B + C)] \ (11)$$
$$= 2R \cos B \cos C \quad (22).$$

103) Wenn man die Fußpunkte der drei Höhenperpendikel im Dreiecke verbindet, so ist jede der Seiten des dadurch entstandenen Dreiecks gleich dem Produkte aus dem Radius des dem Urdreiecke umschriebenen Kreises in den Sinus des doppelten Winkels im Urdreiecke, welcher jener Seite gegenüberliegt.

Behaupt. In Fig. 1 ist

$$EF = R \sin 2A,\ FD = R \sin 2B,\ DC = R \sin 2C.$$

Um das Viereck $AFGE$ läßt sich ein Kreis beschreiben, folglich ist

$$FE \,.\, AG = AF \,.\, EG + AE \,.\, FG^{*}).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} AG &= 2R \cos A \quad (\S.\ 101.), \\ AF &= b \cos A \\ &= 2R \sin B \cos A \quad (64), \\ EG &= 2R \cos A \cos C \quad (\S.\ 102.), \\ AE &= c \cos A \\ &= 2R \sin C \cos A \quad (64), \\ FG &= 2R \cos A \cos B \quad (\S.\ 102). \end{aligned}$$

Werden diese Werthe in die obige Gleichung eingesetzt, so erhält man nach Beseitigung der gleichen Factoren

$$\begin{aligned} FE &= 2R \cos A (\sin B \cos C + \cos B \sin C) \\ &= 2R \cos A \sin A \\ &= R \sin 2A \quad (27). \end{aligned}$$

104) Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem Rechtecke aus dem halben Radius des umschriebenen Kreises und dem Umfange des durch die Höhenfußpunkte bestimmten Dreiecks.

Behaupt. $\triangle ABC = \frac{1}{2} R\, (DE + EF + FD)$ (Fig. 1.)

---

*) S. mein Lehrb. der Planim. II. Curs. 3. Aufl. §. 70c.

Es ist

$$DE + EF + FD = R\,(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)\ (\text{§. }103.)$$
$$= 4R \sin A \sin B \sin C\ \ (\text{§. 90. Zus.}),$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}\,R\,(DE + EF + FD) = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$
$$= \triangle\, ABC\ \ (\text{§. }99.)$$

105) Bezeichnet $\mathfrak{R}$ den Radius des um das Dreieck, welches durch die Höhenfußpunkte eines andern bestimmt wird, und R den Radius des um letzteres beschriebenen Kreises, so ist

$$\mathfrak{R} = \tfrac{1}{2} R.$$

Es ist (Fig. 1.)

$$DE = 2\,\mathfrak{R} \sin EFD\ \ (64),$$

oder, weil

$$EFD = EFG + DFG$$
$$= EAG + DBG$$
$$= 2R - 2C \text{ ist},$$
$$DE = 2\,\mathfrak{R} \sin 2C,$$

es war aber auch

$$DE = R \sin 2C\ \ (\text{§. }103.),$$

folglich ist $\mathfrak{R} = \frac{1}{2} R$.

106) Ist R der Radius des um ein Dreieck beschriebenen und $\mathfrak{r}$ der Radius des in das Dreieck, welches durch die Höhenfußpunkte des vorigen bestimmt wird, eingeschriebenen Kreises, so ist

$$\mathfrak{r} = 2R \cos A \cos B \cos C$$

Es ist (Fig. 1)

$$\triangle\, DEF = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{r}\,(DE + EF + FD)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{r}\,R\,(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)\ \ (\text{§. }103.)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{r}\,R.\ 4 \sin A \sin B \sin C\ \ (\text{§. 90. Zus.})$$

$= 2\mathfrak{r}\ R \sin A \sin B \sin C \ldots \quad (\alpha);$

es ist aber auch (s. mein Lehrb. d. Planim. II. Curs. §. 70.)

$$\triangle DEF = \frac{DE.\ EF.\ FD}{4\,\mathfrak{R}}$$

$$= \frac{R^3 \sin 2A \sin 2B \sin 2C}{2R} \quad (\text{§. 103 u. §. 105.})$$

$$= 4R^2 \sin A \cos A \sin B \cos B \sin C \cos C\ (64) \ldots (\beta).$$

Aus (α) und (β) folgt aber

$$\mathfrak{r} = 2R \cos A \cos B \cos C.$$

Man gelangt zu diesem Satze noch kürzer auf folgendem Wege.

Es ist

$$\mathfrak{r} = 4\,\mathfrak{R} \sin \tfrac{1}{2} EFD \sin \tfrac{1}{2} DEF \sin \tfrac{1}{2} EDF \ (\text{§. 93.})$$

$$= 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \ (\text{§. 105.})$$

$$= 2R \cos C \cos B \cos A.$$

107) Haben $\mathfrak{r}$ und R die vorige Bedeutung, so ist

$$1 - \frac{\mathfrak{r}}{R} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C.$$

Es ist

$$1 - \frac{\mathfrak{r}}{R} = 1 - 2\cos A \cos B \cos C \ (\text{§. 106.})$$

$$= \cos^2 A + \sin^2 A - 2\cos A \cos B \cos C$$

$$= \cos^2 A + \sin^2 (B + C) + 2\cos (B + C) \cos B \cos C$$

$$= \cos^2 A + \sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 B \sin^2 C + 2\sin B \sin C \cos B \cos C$$

$$+ 2\cos^2 B \cos^2 C - 2\sin B \sin C \cos B \cos C$$

$$= \cos^2 A + \sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 B \cos^2 C$$

$$+ \cos^2 B \sin^2 C + \cos^2 B \cos^2 C$$

$$= \cos^2 A + \cos^2 C + \cos^2 B \quad (2).$$

108) Bezeichnet U den Umfang eines Dreiecks und u den Umfang des Dreiecks, welches durch die Höhenfußpunkte des ersteren bestimmt wird, so ist, wenn A, B, C die Winkel des ersteren bezeichnen

$$u = 4\ U \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

Bezeichnet R dasselbe wie vorher, so ist

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}.\ R.\ u$$

oder $\frac{1}{2}\ r\ U = \frac{1}{2}\ R\ u$

$$u = \frac{r}{R}.\ U$$

$$= 4\ U \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \quad (§.\ 93.)$$

109 In ein Dreieck ist ein Kreis beschrieben und mit den durch die Berührungspunkte gebildeten ungleichen Seitenabschnitten als Seiten ein neues Dreieck beschrieben worden. Bezeichnen r den Radius des in das erste Dreieck beschriebenen Kreises, ϱ und ϱ' bezüglich die Radien des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises beim zweiten Dreieck, so ist

$$r^2 = 2\ \varrho\varrho'.$$

Sind a', b', c' die Seiten des neuen Dreiecks, S' dessen halber Umfang, so ist

$$a' = S - a;\ b' = S - b;\ c' = S - c$$

und $\varrho = \sqrt{\dfrac{(S' - a')\ (S' - b')\ (S' - c')}{S'}}$,

$$\varrho' = \frac{a'\ b'\ c'}{4\sqrt{S'\ (S' - a')\ (S' - b')\ (S' - c')}},$$

mithin $\varrho\varrho' = \dfrac{a'\ b'\ c'}{4\ S'} = \dfrac{(S - a)\ (S - b)\ (S - c)}{2\ S} = \dfrac{r^2}{2}$

oder $r^2 = 2\ \varrho\varrho'$.

110) Wenn man die Mittelpunkte der drei äußeren Berührungskreise eines Dreiecks verbindet, so entsteht ein Dreieck, bei welchem der Radius des umschriebenen Kreises doppelt so groß ist als der entsprechende Radius beim Urdreieck.

Mögen A_1, B_1, C_1 (Fig. 2) die Mittelpunkte der drei äußeren Berührungskreise vom Dreieck ABC sein, so halbiren $A_1 B_1, A_1 C_1, B_1 C_1$ die Außenwinkel des $\triangle ABC$ und AA_1 halbirt BAC, folglich ist

$$A_1 A C_1 = \frac{\pi}{2}$$

und
$$A C_1 B = \pi - (C_1 AB + C_1 BA)$$
$$= \pi - \left(\frac{\pi - A}{2} + \frac{\pi - B}{2}\right)$$
$$= \frac{A + B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2};$$

mithin
$$A C_1 = \frac{c \sin ABC_1}{\sin AC_1B}$$
$$= \frac{c \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

und
$$A_1 C_1 = A C_1 \sec A C_1 A_1$$
$$= \frac{c \cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{2 c \cos \frac{B}{2}}{\sin C}$$
$$= 4 R \cos \frac{B}{2}.$$

Bezeichnet nun R_1 den Radius des um $\triangle A_1 B_1 C_1$ beschriebenen Kreises, so ist

$$2 R_1 = \frac{A_1 C_1}{\sin A_1 B_1 C_1} = \frac{4 R \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}}$$

$$= 4\ R,$$
oder $R_1 = 2\ R.$

111) Wenn man in einem Dreiecke von den Winkelspitzen die Transversalen nach den Halbirungspunkten der Gegenseiten zieht und R_1, R_2, *etc.* die Radien der um die so entstandenen sechs Dreiecke beschriebenen Kreise und r_1, r_2, *etc.* die der eingeschriebenen bezeichnen, so finden folgende Gleichungen Statt:

$$R_1\ R_3\ R_5 = R_2\ R_4\ R_6$$
und $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}.$

Sind Aa, Bb, Cc, (Fig. 3.) die bezeichneten Transversalen des Dreiecks ABC, O ihr Durchschnittspunkt und R_1, R_2, *etc.* die Radien der um die Dreiecke AOc, BOc, BOa, COa, COb, AOb beschriebenen Kreise, so ist

$$R_1 = \frac{Ac}{2 \sin AOc} = \frac{c}{4 \sin AOc},\ R_2 = \frac{c}{4 \sin BOc},$$

$$R_3 = \frac{a}{4 \sin BOa},\ R_4 = \frac{a}{4 \sin COa},$$

$$R_5 = \frac{b}{4 \sin COb},\ R_6 = \frac{b}{4 \sin AOb};$$

mithin

$$R_1\ R_3\ R_5 = R_2\ R_4\ R_6$$

Da ferner

$$Oa = \tfrac{1}{3}\ Aa,\ Ob = \tfrac{1}{3}\ Bb,\ Oc = \tfrac{1}{3}\ Cc,$$

so ist

$$\triangle\ AOB = \triangle\ AOC = \triangle\ BOC = \tfrac{1}{3}\ \triangle\ ABC = F$$
und $\triangle\ AOc = \triangle\ BOc\ etc. = \tfrac{1}{6}\ \triangle\ ABC = \tfrac{1}{2}\ F$

und demnach

$$\frac{F}{r_1} = AO + Oc + Ac,$$

$$\frac{F}{r_2} = BO + Oc + Bc,$$

mithin

$$F\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = AO - BO,$$

und analog

$$F\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) = BO - CO,$$

$$F\left(\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r_6}\right) = CO - AO.$$

Hieraus erhält man durch Addition

$$F\left\{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5}\right) - \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}\right)\right\} = 0,$$

oder $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}$.

112) Wenn man von den Winkelspitzen eines Dreiecks ABC Linien nach dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises zieht, welche die Peripherie desselben in den Punkten D, E, F schneiden, so sind die Winkel des durch D, E, F bestimmten Dreiecks bezüglich $\frac{\pi + A}{4}$, $\frac{\pi + B}{4}$, $\frac{\pi + C}{4}$. Welches sind die Seiten und der Inhalt?

α) Zieht man (Fig. 4) OA, OB, OC, so ist

$$AOB = \pi - \frac{A + B}{2},$$

$$ODE = \tfrac{1}{2}(\pi - DOE) = \frac{A + B}{4}$$

und analog $ODF = \frac{A + C}{4}$,

folglich $EDF = ODE + ODF$

$$= \frac{A + A + B + C}{4} = \frac{\pi + A}{4} \text{ etc.}$$

β) $DE = 2\,r \sin \tfrac{1}{2} AOB$ [r = Radius des eingeschriebenen Kreises.]

$$= 2\,r\,\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}\right)$$

$$= 2\,r\,\cos\frac{A+B}{4}$$

oder $DE = 2\,r\,\cos\left(45 - \frac{C}{4}\right)$, und analog

$$DF = 2\,r\,\cos\left(45 - \frac{B}{4}\right).$$

$$EF = 2\,r\,\cos\left(45 - \frac{A}{4}\right).$$

γ) Wird der Inhalt von $\triangle\,DEF = \delta$ gesetzt, so ist

$$\delta = \tfrac{1}{2}\,r^2\,(\sin AOB + \sin BOC + \sin AOC)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,r^2\left(\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{A+C}{2} + \sin\frac{B+C}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,r^2\,(\cos C + \cos B + \cos A).$$

Bezeichnet R den Radius des um $\triangle\,ABC$ beschriebenen Kreises, so ist

$$\delta = \tfrac{1}{2}\,\frac{r^2\,(R+r)}{R.} \quad (\S.\ 97.)$$

Sollen die Werthe unter β) und γ) durch die Seiten a, b, c des Dreiecks ABC ausgedrückt werden, so hat man nur

$$r = \sqrt{\frac{(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}{S}}$$

und $R = \dfrac{a\,b\,c}{4\sqrt{S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}}$ zu substituiren.

113) Wenn man über den Seiten eines Dreiecks ABC Dreiecke beschreibt, welche dem ursprünglichen congruent sind, und zwar so, daß die bei A, B, C bezüglich zusammenstoßenden Winkel einander gleich sind; ferner, wenn zugleich $A'\,B',\,C'$ die Mittelpunkte der in die letztgebildeten Dreiecke beschriebenen Kreise sind und R, R' bezüglich die Radien der um $\triangle\,A'\,B'\,C'$ beschriebenen Kreise bezeichnen, so ist

$$\triangle\,ABC : \triangle\,A'\,B'\,C' = R : R'.$$

Bezeichnet r (Fig. 5) den Radius des in eins der vier congruenten Dreiecke beschriebenen Kreises, so ist

$$AC' = AB' = \frac{r}{\sin \frac{1}{2} A} \dots (1)$$

$$\text{und } B'C' = 2\, AC'.\, \sin \tfrac{1}{2}.\, B'AC'$$

$$= 2\, AC'.\, \sin A, \text{ oder wegen (1)}$$

$$= \frac{2\, r}{\sin \frac{1}{2} A} \cdot \sin A$$

$$\text{oder } B'C' = 4\, r \cos \tfrac{1}{2} A \dots (2)$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$A'C' = 4\, r \cos \tfrac{1}{2} B \dots (3)$$

$$A'B' = 4\, r \cos \tfrac{1}{2} C \dots (4).$$

$$\text{Nun ist } AC'B' = \tfrac{1}{2}(\pi - B'AC')$$

$$= \frac{\pi}{2} - A,$$

$$BC'A' = \frac{\pi}{2} - B,$$

$$\text{und } AC'B' = \pi - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right),$$

$$\text{folglich } A'C'B' = AC'B - (AC'B' + BC'A')$$

$$= \left(\pi - \frac{A+B}{2}\right) - [\pi - (A + B)]$$

$$= \frac{A+B}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2};$$

man hat demnach

$$\triangle\, A'B'C' = \tfrac{1}{2}\, A'C'.\, B'C'.\, \sin A'C'B'$$

$$= \tfrac{1}{2}.\, 4\, r \cos \tfrac{1}{2} B.\, 4\, r.\, \cos \tfrac{1}{2} A.\, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$\text{oder } \triangle\, A'B'C' = 8\, r^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \dots (5).$$

Nun ist ferner

$$R' = \tfrac{1}{2}.\ \frac{A'\,B'}{\sin\ A'\,C\,B'} = \frac{2\,r\ \cos\ \frac{C}{2}}{\sin\ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)} = 2\,r,$$

und $\triangle\ ABC = \frac{a\,b\,c}{4\,R}$, wenn a, b, c dessen Seiten bezeichnen, folglich

$$\frac{\triangle\,A'\,B'\,C'}{R'} = 4\,r\ \cos\ \frac{A}{2}\ \cos\ \frac{B}{2}\ \cos\ \frac{C}{2}$$

$$= 4\sqrt{\frac{(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}{S}}.\ \sqrt{\frac{S.\,(S-a)}{b\,c}}.$$

$$\sqrt{\frac{S.\,(S-b)}{a\,c}}.\ \sqrt{\frac{S\,(S-c)}{a\,b}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}{a\,b\,c}} = \frac{\triangle\ ABC}{R},$$

oder $\triangle\ ABC : \triangle\ A'\,B'\,C' = R : R'$.

114) Werden die drei Seiten eines Dreiecks ABC in D, E, F so getheilt, daß

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = \frac{1}{n-1}$$

ist, so findet die Proportion Statt:

$$\triangle\ DEF : \triangle\ ABC = \left(n^2 - 3\,n + 3\right) : n^2.$$

Es ist (Fig. 6)

$$\frac{AD}{AB} = \frac{1}{n},\ \frac{AF}{AC} = \frac{n-1}{n},$$

folglich $\frac{\triangle\ FAD}{\triangle\ ABC} = \frac{\frac{1}{2}\ AD.\ AF.\ \sin\ A}{\frac{1}{2}\ AB.\ AC\ \sin\ A.}$

$$= \frac{n-1}{n^2},$$

$$\triangle FAD = \frac{n-1}{n^2} \cdot \triangle ABC,$$

analog $\triangle BDE = \frac{n-1}{n^2} \cdot \triangle ABC,$

$$\triangle FCE = \frac{n-1}{n^2} \cdot \triangle ABC,$$

folglich

$$\triangle DEF = \triangle ABC - (\triangle FAD + \triangle BDE + \triangle FCE)$$

$$= \left\{1 - \frac{3\,(n-1)}{n^2}\right\} \triangle ABC$$

$$= \frac{n^2 - 2n + 3}{n^2} \cdot \triangle ABC.$$

115) Wenn man die zu den Seiten eines Dreiecks ABC gehörigen Bögen des umschriebenen Kreises halbirt, so bestimmmen diese Halbirungspunkte ein neues Dreieck dessen Seiten bezüglich

$$\frac{a}{2\,sin\,\frac{A}{2}},\ \frac{b}{2\,sin\,\frac{B}{2}},\ \frac{c}{2\,sin\,\frac{C}{2}},$$

und dessen Inhalt

$$= \frac{\triangle ABC}{8\,sin\,\frac{1}{2}\,A\,sin\,\frac{1}{2}\,B\,sin\,\frac{1}{2}\,C.}\ \text{ist.}$$

Es sei O Fig. 7) der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, a, b, c die Halbirungspunkte der Bögen BC, AC, AB; R der Radius des Kreises, so ist, wenn man OA, Ob, Oc 2c. zieht

$$bc = 2\,R\,\sin\frac{bOc}{2} = 2\,R\,\sin\tfrac{1}{2}\,(AOc = AOb)$$

$$= 2\,R\,\sin\tfrac{1}{4}\,(AOB + AOC)$$

$$= 2\,R\,\sin\tfrac{1}{4}\,(\pi - 2\,OAB + \pi - 2\,OAC)$$

$$= 2\,R\,\sin\tfrac{1}{4}\,(2\pi - 2\,A)$$

$$= 2\,R\,\cos\frac{A}{2} = \frac{a}{\sin A} \cdot \cos\frac{A}{2}$$

$$\text{oder } bc = \frac{a}{2 \sin \frac{A}{2}},$$

$$\text{analog } ac = \frac{b}{2 \sin \frac{B}{2}},$$

$$ab = \frac{c}{2 \sin \frac{C}{2}}.$$

Ferner ist

$$\triangle\, abc = \tfrac{1}{2}\, ab.\, ac \sin bac$$

$$= \tfrac{1}{2}\, ab.\, ac \sin \frac{bOc}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \frac{c}{2 \sin \frac{C}{2}} \cdot \frac{b}{2 \sin \frac{B}{2}} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}\, bc \sin A}{8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\triangle\, ABC}{8 \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C}.$$

116) Wenn man in den Winkelspitzen eines Dreiecks auf den anstoßenden Seiten Lothe errichtet, so entsteht ein Sechseck, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt und dessen Inhalt gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks ist.

Es seien Ac, Ab (Fig. 8) senkrecht auf AC, AB; Bc, Ba auf BC, BA; Ca, Cb auf CA, CB bezüglich, so bilden diese Lothe das Sechseck $Ab\ Ca\ Bc$. Da nun CAc und CBc rechte Winkel sind, so liegen die Punkte A, C, B, c in der Peripherie des über der Diagonale Cc als Durchmesser beschriebenen Kreises, welcher demnach der um $\triangle\, ABC$ beschriebene ist. Ganz entsprechend läßt sich zeigen, daß auch a und b Punkte dieses Kreises sind.

Es ist ferner

$$CAc = \frac{\pi}{2} \text{ und } AcC = ABC = B,$$

folglich $Ac = b \cot B$, und entsprechend,

$$Bc = a \cot A, \text{ außerdem}$$

$$AcB = \pi - C,$$

mithin $\triangle\ AcB = \frac{1}{2}\, ab \sin C \cot A \cot B$

oder $\triangle\ AcB = \cot A.\ \cot B.\ \triangle\ ABC,$

$$\triangle\ AbC = \cot A.\ \cot C.\ \triangle\ ABC$$

$$\triangle\ CaB = \cot B.\ \cot C.\ \triangle\ ABC,$$

mit

$$Ac\ Ba\ Cb = (1 + \cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C)\ \triangle\ ABC.$$

Nun ist

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \quad (\S.\ 86)$$

oder $\cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C = 1,$

folglich

$$Ac\ Ba\ Cb = 2\ \triangle\ ABC.$$

117) Wenn man über den Seiten eines Dreiecks nach außen drei andere beschreibt, welche den Gegenwinkel der Seite als Winkel an der Spitze haben, so bestimmen die Mittelpunkte der um die letzteren Dreiecke beschriebenen Kreise ein Dreieck, welches dem ursprünglichen congruent ist.

Mögen a, b, c (Fig. 5) die Spitzen der über den Seiten BC, AC, AB des Dreiecks ABC beschriebenen Dreiecke sein, A', B', C' die Mittelpunkte ihrer umschriebenen Kreise, O Centrum und R Radius des um das Urdreieck beschriebenen Kreises, so ist, wenn man BA', BC', $A'C'$ zieht,

$$BA' = \text{Radius des um } \triangle\ aAC \text{ beschriebenen Kreises}$$

$$= \tfrac{1}{2}.\ \frac{BC}{\sin BaC} = \tfrac{1}{2}.\ \frac{BC}{\sin BAC} = R,$$

$$\text{ebenso } BC' = R$$

$$\text{und } CBA' = \tfrac{1}{2}(\pi - CA'B,)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\pi - 2\,CaB)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\pi - 2\,A),$$

$$\text{analog } ABC' = \tfrac{1}{2}(\pi - 2\,C);$$

$$\text{mithin } A'B'C' = CBA' + ABC' + ABC$$

$$= \pi - A - C + B = 2\,B,$$

$$\text{und } A'C' = 2\,BA' \sin \tfrac{1}{2}\,A'BC'$$

$$= 2\,R \sin B = b.$$

Aehnlich läßt sich zeigen, daß

$$A'B' = c \text{ und } B'C' = a$$

ist.

118) Ueber den Seiten eines Kreises sind Quadrate beschrieben und die Mittelpunkte derselben verbunden; in welchem Verhältniß steht das hierdurch gebildete Dreieck zum ursprünglichen?

Sind b und c (Fig. 9) die Mittelpunkte der über AC und AB beschriebenen Quadrate, so ist wenn man Ab, Ac, bc zieht, bc die Seite des neuen offenbar ebenfalls gleichseitigen Dreiecks und

$$Ac = \frac{a}{\sqrt{2}},\ bAc = 90^0 + 60^0 = 150^0,$$

$$bc = 2\,Ac.\ \sin 75^0 = a \cos 15^0 \sqrt{2}$$

$$\text{und } \frac{\triangle\,abc}{\triangle\,ABC} = \frac{(bc)^2}{a^2} = 2\cos^2 15$$

$$= 1 + \cos 30$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

119) Bezeichnen x, y, z die Winkelhalbirenden eines Dreiecks, gezogen bis zu den Gegenseiten, so findet zwischen ihnen und den Dreiecksseiten folgende Relation Statt:

$$(b+c)^2\frac{x^2}{bc} + (c+a)^2\frac{y^2}{ac} + (a+b)^2\frac{z^2}{ab} = (a+b+c)^2.$$

Sind Aa, Bb, Cc (Fig. 3) die drei Winkelhalbirenden des Dreiecks ABC, dann ist

$$Aa = x \text{ und } \triangle\, CAa + \triangle\, BAa = \triangle\, ABC$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{2}\, bx \sin\frac{A}{2} + \tfrac{1}{2}\, cx \sin\frac{A}{2} = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A,$$

$$(b + c)\, x = 2\, bc \cos\frac{A}{2},$$

$$(b + c)^2 \frac{x^2}{bc} = 4\, bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$= 4\, S\, (S - a),$$

$$\text{analog } (a + c)^2 \frac{y^2}{ac} = 4\, S\, (S - b),$$

$$(a + b)^2 \frac{z^2}{ab} = 4\, S\, (S - c).$$

durch Addition erhält man:

$$(b + c)^2 \frac{x^2}{bc} + (a + c)^2 \frac{y^2}{ac} + (a + b)^2 \frac{z^2}{ab} = 4\, S^2$$

$$= (a + b + c)^2.$$

121) Die von der Winkelspitze eines Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie gezogene Transversale theilt den Winkel an der Spitze so, daß die Differenz der Cotangenten beider Stücke gleich ist der Differenz der Cotangenten der Winkel an der Grundlinie.

Setzt man BAD (Fig. 10) $= \theta$, $CAD = \varphi$,

$$\text{so ist } \frac{\sin\theta}{\sin B} = \frac{BD}{AD} = \frac{CD}{AD} = \frac{\sin\varphi}{\sin C},$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{\sin B}{\sin C} \cdots (1)$$

$$\text{und } \sin(\theta + \varphi) = \sin A = \sin(B + C),$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\varphi} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C},$$

$$\frac{\sin^2\theta - \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin^2 C}$$ oder wegen (1)

$$\frac{\sin^2\theta - \sin^2\varphi}{\sin\theta\sin\varphi} = \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin B\sin C},$$

$$\frac{\sin(\theta-\varphi)\sin(\theta+\varphi)}{\sin\theta\sin\varphi} = \frac{\sin(B-C)\sin(B+C)}{\sin B\sin C},$$

oder $$\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin\theta\sin\varphi} = \frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}$$

oder endlich

$$\cot\theta - \cot\varphi = \cot B - \cot C.$$

121) Sind die Seiten eines Dreiecks bezüglich $a \cos A$, $b \cos B$, $c \cos C$, wo a, b, A, *etc.* bezüglich Seiten und Winkel eines andern Dreiecks sind, so sind die Winkel des ersterwähnten Dreiecks bezüglich die Supplemente zu $2A$, $2B$, $2C$.

Bezeichnen wir die Winkel des ersten Dreiecks mit A', B', C', so ist

$$\frac{\sin B'}{\sin A'} = \frac{b\cos B}{a\cos A} = \frac{\sin B\cos B}{\sin A\cos A} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A} \ldots \text{(I)},$$

und analog

$$\frac{\sin C'}{\sin A'} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$$

oder $$\frac{\sin(A'+B')}{\sin A'} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$$

oder $$\cos B' + \frac{\sin B'}{\sin A'}.\cos A' = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$$

oder $$\cos B' + \frac{\sin 2B}{\sin 2A}.\cos A' = \frac{\sin 2C}{\sin 2A},$$

oder endlich $\cos B' \sin 2A + \cos A' \sin 2B = \sin 2C \ldots$ (II).

Wegen (I) ist aber auch

$$\sin B' \sin 2A - \sin A' \sin 2B = 0 \ldots \text{(III)}$$

und man erhält deshalb durch Addition der Quadrate von (II) und (III)

$$\sin^2 2A + \sin^2 2B + 2\cos(A' + B')\sin 2A \sin 2B = \sin^2 2C,$$

$$\begin{aligned} 2\sin 2A \sin 2B \cos(A'+B') &= \sin^2 2(A+B) - \sin^2 2A - \sin^2 2B \\ &= \sin 2B \left\{\sin(4A+2B) - \sin 2B\right\} \\ &= 2\sin 2A \sin 2B \cos(2A + 2B), \end{aligned}$$

folglich $\cos(A' + B') = \cos 2(A + B)$

oder $\cos C' = -\cos 2(A + B)$

$= -\cos 2C,$

mithin $C' = \pi - 2C,$

und analog $B' = \pi - 2B,$

$A' = \pi - 2A.$

122) Sind a, b, c die drei Seiten und α, β, γ die drei Höhen eines Dreiecks, so ist

$$\frac{\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}.$$

Es ist

$$\alpha = c\sin B = b\sin C,$$

$$\beta = c\sin A,$$

$$\gamma = b\sin A,$$

folglich $\dfrac{\alpha^2}{\beta\gamma} = \dfrac{bc\sin B\sin C}{bc\sin A\sin A} = \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{a} = \dfrac{bc}{a^2}.$

und entsprechend

$$\frac{\beta^2}{\alpha\gamma} = \frac{ac}{b^2},$$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha\beta} = \frac{ab}{c^2},$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}.$$

123) Stehen die Seiten eines Dreiecks in harmonischer Progression, so ist

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin A \sin C}{\cos A + \cos C}}.$$

Aus der Voraussetzung folgt

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin C} = \frac{2}{\sin B}$$

$$\text{oder } \frac{\sin A + \sin C}{\sin A \sin C} = \frac{1}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}}$$

und hieraus

$$2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sin A \sin C}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}}$$

$$\text{oder } 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sin A \sin C}{\cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{B}{2}},$$

$$\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{\sin A \sin C}{2 \cos \frac{A-C}{2} \cos \frac{A+C}{2}}$$

$$= \frac{\sin A \sin C}{\cos A + \cos C},$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin A \sin C}{\cos A + \cos C}}.$$

124[a]) Die Tangenten der Winkel eines Dreiecks verhalten sich wie 1 : 2 : 3, welches sind die Werthe dieser Tangenten?

Es ist

$$\operatorname{tg} B = 2 \operatorname{tg} A, \ \operatorname{tg} C = 3 \operatorname{tg} A$$

und $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$, (§. 86)

folglich

$$6 \operatorname{tg} A = 6 \operatorname{tg}^3 A$$

$$\text{oder } \operatorname{tg} A = 1, \ \operatorname{tg} B = 2, \ \operatorname{tg} C = 3.$$

124b) Verhalten sich die Tangenten der Winkel eines Dreiecks wie 1 : 2 : 3 und bezeichnen p_1 p_2 p_3 die drei Höhen und a, b, c die Seiten desselben, so ist $5 p_1 p_2 p_3 = 3 abc$.

Es ist

$$a = p_1 \ (\cot B + \cot C) = \tfrac{5}{6} \, p_1,$$

$$b = p_2 \ (\cot A + \cot C) = \tfrac{4}{3} \, p_2,$$

$$c = p_3 \ (\cot A + \cot B) = \tfrac{3}{2} \, p_3,$$

mithin $abc = \frac{5}{3} \, p_1 p_2 p_3$.

125) Bilden die Tangenten der halben Winkel eines Dreiecks eine arithmetische Progression, so bilden die Cosinus der ganzen Winkel ebenfalls eine arithmetische Progression.

Voraussetzung. $tg \frac{A}{2} + tg \frac{C}{2} = 2 \, tg \frac{B}{2}$,

Behauptung. $cos \, A + cos \, C = 2 \, cos \, B$.

Es ist $\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 2 \cot \frac{A+C}{2}$

oder $\dfrac{\sin \frac{A+C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} = \dfrac{2 \cos \frac{A+C}{2}}{\sin \frac{A+C}{2}}$ (45),

$$\sin^2 \frac{A+C}{2} = \left(\cos \frac{A+C}{2} + \cos \frac{A-C}{2}\right) \cos \frac{A+C}{2} \quad (25),$$

$$\cos^2 \frac{A+C}{2} - \sin^2 \frac{A+C}{2} = - \tfrac{1}{2} \, (\cos A + \cos C) \ (37),$$

$$\cos \, (A + C) = - \tfrac{1}{2} \, (\cos A + \cos C) \quad (31)$$

$$2 \cos B = \cos A + \cos C.$$

126) Bilden die Radien der drei äußeren Berührungskreise eines Dreiecks eine arithmetische Progression, so bilden auch die Tangenten der halben Dreieckswinkel eine solche.

Behauptung. Bezeichnen r', r'', r''' die vorgenannten Radien und ist

$$r' + r''' = 2r'',$$

$$\text{so ist } tg\,\frac{A}{2} + tg\,\frac{C}{2} = 2\,tg\,\frac{B}{2}.$$

Es ist

$$\left.\begin{aligned} r' &= 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\ r'' &= 4R \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\ r''' &= 4R \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \quad (\S.\ 93),$$

folglich

$$2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

$$= \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Wird diese Gleichung durch $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ dividirt, so erhält man

$$2\,\text{tg}\,\frac{B}{2} = \text{tg}\,\frac{A}{2} + \text{tg}\,\frac{C}{2}.$$

Aus §. 125 u. 126 folgt der

Zusatz. Bilden die Radien der drei äußern Berührungskreise eines Dreiecks eine arithmetische Progression, so bilden auch die Cosinus der Dreieckswinkel eine solche und umgekehrt.

127) Bilden die Cotangenten der halben Winkel eines Dreiecks eine arithmetische Progression, so bilden auch die Sinus der ganzen Winkel eine solche.

Voraussetzung. $cot\,\frac{A}{2} + cot\,\frac{C}{2} = 2\,cot\,\frac{B}{2}$.

Behauptung. $sin\,A + sin\,C = 2\,sin\,B.$

Es ist

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{A+C}{2},$$

$$\frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{2\sin\frac{A+C}{2}}{\cos\frac{A+C}{2}} \quad (46),$$

$$\cos\frac{A+C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \cos\frac{A-C}{2} - \cos\frac{A+C}{2},$$

$$2\cos\frac{A+C}{2} = \cos\frac{A-C}{2}$$

$$4\cos\frac{A+C}{2}\sin\frac{A+C}{2} = 2\cos\frac{A-C}{2}\sin\frac{A+C}{2},$$

$$2\sin(A+C) = \sin A + \sin C \quad (27\ \text{u.}\ 35)$$

$$\text{oder } 2\sin B = \sin A + \sin C.$$

128) Bilden die Radien der drei äußeren Berührungskreise eines Dreiecks eine harmonische Progression, so bilden auch die Tangenten der halben Dreieckswinkel eine harmonische Progression und die Cotangenten eine arithmetische.

Voraussetzung. $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'''} = \frac{2}{r''}$.

Behauptung. $\frac{1}{tg\,\frac{A}{2}} + \frac{1}{tg\,\frac{C}{2}} = \frac{1}{tg\,\frac{B}{2}}$ oder

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\cot\frac{B}{2}.$$

Wegen §. 93 ist

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{2}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Wird die ganze Gleichung mit $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ multiplicirt, so erhält man

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\cot\frac{B}{2}$$

oder $$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

Aus §. 127 u. 128 ergiebt sich der

Zusatz. Bilden die Radien der drei äußeren Berührungskreise eines Dreiecks eine harmonische Progression, so bilden die Sinus der Dreieckswinkel und deshalb auch die Dreiecksseiten eine arithmetische und umgekehrt.

Anmerkung. Die Sätze §. 125 bis 128 lassen sich auch umkehren.

129) Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke eine Kathete doppelt so groß als die andere, so bilden die Radien der drei äußeren Berührungskreise eine arithmetische Progression.

Behauptung. $2a = b$.

Behauptuug. $r' + r''' = 2r''$.

Ist $2a = b$, so ist

$$\operatorname{tg} A = \tfrac{1}{2},$$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \tfrac{1}{2}$$

$$2\sin A = \cos A$$

$$2 \cos B = \cos A + \cos C \left(\text{weil } A = \frac{\pi}{2}\right),$$

folglich $r' + r''' = 2 r''$ (§. 126 Zus.)

130) Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke das Dreifache einer Kathete gleich dem Vierfachen der andern, so bilden die Radien der drei äußeren Berührungskreise eine harmonische Progression.

Voraussetzung. $4 a = 3 b$,

Behauptung. $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'''} = \frac{2}{r''}$.

Ist $4 a = 3 b$, so ist

$$tg\ B = \frac{4}{3},$$

$$\text{folglich } \sin B = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} \quad (4)$$

$$= \frac{4}{5},$$

$$\text{und } 2 \sin B = \frac{8}{5};$$

$$\text{ferner ist } \sin A = \cos B = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}}$$

$$= \frac{3}{5},$$

$$\text{und } \sin C = 1,$$

$$\text{folglich } \sin A + \sin C = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\text{und } 2 \sin B = \sin A + \sin C,$$

woraus noch §. 128. Zus. die Richtigkeit der Behauptung folgt.

131) Bilden die Radien der drei äußeren Berührungskreise eines Dreiecks eine arithmetische Progression, so ist die Summe der Durchmesser des um- und eingeschriebenen Kreises gleich dem dreifachen Abstande des Höhendurchschnittspunktes von der Winkelspitze, welche dem arithmetischen Mittel entspricht.

Voraussetzung. $2r'' = r' + r'''$

Behauptung. $3BG = 2R + 2r$. (Fig. 1.)

Nach §. 126. Zus. ist unter der gemachten Voraussetzung

$$2 \cos B = \cos A + \cos C,$$

$$\text{also } 3 \cos B = \cos A + \cos B + \cos C$$

$$= \frac{R + r}{R} \cdot \text{ (§. 97.)}$$

Nun ist (Fig. 1), wenn G den Durchschnitt bezeichnet,

$$BG = 2R \cos B \text{ (§. 101.)},$$

$$\text{mithin } \cos B = \frac{BG}{2R},$$

$$\text{und } 3 \cos B = 3. \frac{BG}{2R} = \frac{R + r}{R},$$

$$3BG = 2R + 2r.$$

132) Bilden die Radien der drei äußeren Berührungskreise eines Dreiecks eine arithmetische Progression, so bilden die Abstände des Höhendurchschnitts von jenen Winkelspitzen ebenfalls eine arithmetische Progression.

Voraussetzung. $2r'' = r' + r'''$

Behauptung. $2BG = AG + CG$.

Nach §. 126 Zus. ist

$$2 \cos B = \cos A + \cos C$$

und weil

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= \frac{AG}{2R},\\ \cos B &= \frac{BG}{2R},\\ \cos C &= \frac{CG}{2R},\end{aligned}\right\} \quad (\S.\ 101)$$

$$2\,AG = BG + CG.$$

133) Bilden die Quadrate der Abstände des Mittelpunktes des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises von den Winkelspitzen eine harmonische Progression, so bilden die Radien der drei äußeren Berührungskreise eine arithmetische.

Bezeichnen m_1, m_2, m_3 die genannten Abstände und es ist

$$\frac{2}{m_2^2} = \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_3^2}$$

so ist $2\,r'' = r' + r'''$.

Es ist

$$m_1 = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}},$$

$$m_2 = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}},$$

$$m_3 = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}},$$

folglich nach Voraussetzung

$$2\sin^2\frac{B}{2} = \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{C}{2}.$$

Wird diese Gleichung mit 2 multiplicirt, so erhält man (41)

$$2\,(1 - \cos B) = 1 - \cos A + 1 - \cos C,$$

oder $2\cos B = \cos A + \cos C$,

woraus nach §. 126. Zus. die Behauptung folgt.

134) Bilden die Quadrate der Abstände des Mittelpunktes des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises von den Winkelspitzen eine harmonische Progression, so bilden die Abstände des Mittelpunkts des umschriebenen Kreises von den Seiten eine arithmetische.

Ist bei voriger Bezeichnung

$$\frac{2}{m_2^{\,2}} = \frac{1}{m_1^{\,2}} + \frac{1}{m_3^{\,2}},$$

und bezeichnen p_1, p_2, p_3 die letztgenannten Abstände, so ist

$$2\,p_2 = p_1 + p_3.$$

Es ist

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= R \cos A, \\ p_2 &= R \cos B, \\ p_3 &= R \cos C, \end{aligned}\right.$$

$$\text{und}\quad \left.\begin{aligned} \frac{AG}{2} &= R \cos A, \\ \frac{BG}{2} &= R \cos B, \\ \frac{CG}{2} &= R \cos C, \end{aligned}\right\} \quad (\text{§. } 101)$$

$$\text{folglich}\quad \begin{aligned} AG &= 2\,p_1, \\ BG &= 2\,p_2, \\ CG &= 2\,p_3. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$2\,BG = AG + CG \quad (\text{§. 133 u. §. 132}),$$

$$\text{folglich}\quad 4\,p_2 = 2\,p_1 + 2\,p_3$$

$$\text{oder}\quad 2\,p_2 = p_1 + p_3.$$

135) Die Abstände des Mittelpunkts des um ein Dreieck beschriebenen Kreises von den Seiten und die Abstände des Höhendurchschnittspunktes von den Seiten stehen in der Abhängigkeit, daß, wenn die eine Trias eine harmonische Progression bildet, die andere eine arithmetische bildet.

a) Bei voriger Bezeichnung sei

$$\frac{2}{p_2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3},$$

so ist, weil $p_1 = R \cos A$ etc.,

$$\frac{2}{\cos B} = \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C}$$

oder $2 \cos A \cos C = \cos B \cos C + \cos A \cos B.$

Nun ist (Fig. 1)

$$\left.\begin{aligned} GD &= 2 R \cos B \cos C, \\ GE &= 2 R \cos A \cos C, \\ GF &= 2 R \cos A \cos B, \end{aligned}\right\} \quad (\S.\ 102.)$$

folglich auch

$$2\, GE = GD + GF.$$

b) Ist

$$\frac{2}{GE} = \frac{1}{GD} + \frac{1}{GF},$$

oder wegen §. 102.

$$\frac{2}{\cos A \cos C} = \frac{1}{\cos B \cos C} + \frac{1}{\cos A \cos B},$$

so erhält man durch Multiplication mit $\cos A \cos B \cos C$

$$2 \cos B = \cos A + \cos C$$

und hieraus

$$2\, p_2 = p_1 + p_3.$$

Anmerkung. Anderweite Sätze und eine weitere Durchführung des hier Mitgetheilten siehe in meiner Schrift: Trigonaltriaden in arithmetischer und hormonischer Progression. Halle. 1850.

136) Stehen die drei Seiten eines Dreiecks in arithmetischer Progression und ist der Abstand zwischen den Mittelpunkten des um- und eingeschriebenen Kreises das geometrische Mittel zwischen der größten und kleinsten Dreiecksseite, so verhalten sich die Seiten wie

$$\sqrt{5} - 1 : \sqrt{5} : \sqrt{5} + 1.$$

Sind a, b, c die Dreiecksseiten, R, r die Radien des um- und eingeschriebenen Kreises, d der Abstand der Mittelpunkte der letzteren, dann ist nach einem bekannten Satze*):

$$d^2 = R^2 - 2\,Rr \ldots (1),$$

ferner $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}} \ldots (2)$,

und $r = \dfrac{\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{S} \ldots (3)$,

hieraus folgt

$$2\,Rr = \frac{abc}{2\,S} \cdots (4);$$

und weil nach Voraussetzung

$$a + c = 2b \ldots (5),$$

oder $S = \dfrac{3b}{2} \ldots (6)$,

so erhält man

$$2\,Rr = \frac{ac}{3} \ldots (7).$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$d^2 = ac \ldots (8)$$

oder $R^2 - 2\,Rr = ac$ nach (1),

oder $R^2 - \dfrac{ac}{3} = ac$ nach (7)

oder $R^2 = \dfrac{4}{3}\,ac \ldots (9)$.

*) Siehe meine Schrift: Die schwierigeren geometrischen Aufgaben ꝛc. Halle. 1849. §. 31[b].

Setzt man diesen Werth in (2) nachdem man die Gleichung quadrirt hat, so erhält man:

$$\frac{64\,ac}{3} \cdot S\,(S - a)\,(S - b)\,(S - c) = a^2\,b^2\,c^2 \ldots (10).$$

Setzt man in diese Gleichung (6) ein und setzt noch links wegen (5) $c = 2\,b - a$, so erhält man

$$32\,\left(\frac{3\,b}{2} - a\right)\,\frac{b}{2}\,\left(\frac{2\,a - b}{2}\right) = abc,$$

oder $4\,(3\,b - 2\,a)\,(2\,a - b) = a\,(2\,b - a)$

oder $4\,(8\,ab - 4\,a^2 - 3\,b^2) = 2\,ab - a^2$,

und hieraus

$$15\,a^2 - 30\,ab + 12\,b^2 = 0,$$

$$5\,a^2 - 10\,ab + 4\,b^2 = 0,$$

$$5\,a^2 - 10\,ab + 5\,b^2 = b^2$$

$$5\,(a^2 - 2\,ab + b^2) = b^2$$

$$(a - b)\,\sqrt{5} = \pm\,b,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{\sqrt{5}},$$

$$\frac{c}{b} = 2 - \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} \mp 1}{\sqrt{5}},$$

mithin $a : b : c = \sqrt{5} + 1 : \sqrt{5} : \sqrt{5} - 1$.

137) Bilden die Tangenten der Winkel eines Dreiecks eine geometrische Progression, deren Exponent n ist, so ist

$$\sin\,2\,C = n \sin\,2\,A.$$

Der Voraussetzung gemäß ist

$$\operatorname{tg} A = n \operatorname{tg} B = n^2 \operatorname{tg} C,$$

folglich $\operatorname{tg} A = -\,n \operatorname{tg}\,(A + C$

oder $n \sin\,(A + C)\,\cos A = -\,\cos\,(A + C)\,\sin A$,

$$n\,[\sin\,(A + C)\,\cos A - \cos\,(A + C)\,\sin A]$$
$$= -\,(n + 1)\,\cos\,(A + C)\,\sin A,$$

d. i. $n \sin C = -(n+1) \cos(A+C) \sin A \ldots (1)$.

Nach Voraussetzung ist ferner

$$\operatorname{tg} B = n \operatorname{tg} C,$$

oder $\operatorname{tg}(A+C) = -n \operatorname{tg} C$,

$$\sin(A+C) \cos C = -n \sin C \cos(A+C),$$

$$\sin(A+C)\cos C - \sin C\cos(A+C) = -(n+1)\sin C\cos(A+C),$$

d. i. $\sin C = -(n+1) \sin C \cos(A+C) \ldots (2)$.

Dividirt man (1) durch (2), so erhält man

$$n. \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin C},$$

$n \sin^2 C = \sin^2 A$, und nach Voraussetzung

$$\cot C = n^2 \cot A,$$

folglich nach Multiplication beider Gleichungen

$$n \sin C \cos C = n^2 \sin A \cos A.$$

oder $\sin 2C = n \sin 2A$.

138) In jedem Dreiecke ist

$$tg\left(\frac{A}{2} + B\right) = \frac{c+b}{c-b} \cdot tg\,\frac{A}{2}$$

Beispiel. Wenn $3c = 7b$ und $A = 6^0\ 37'\ 24''$, welches sind die Werthe von B und C?

Es ist

$$\frac{c+b}{c+b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{C+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{C-B}{2}},$$

$$\text{folglich } \cot\frac{C-B}{2} = \frac{c+b}{c-b} \cdot \cot\frac{C+B}{2}$$

$$= \frac{c+b}{c-b} \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

oder auch

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A+B+C}{2} - \frac{C-B}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} + B\right)$$

$$= \frac{c + b}{c - b} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} .$$

$$B + \frac{A}{2} = 8^0\ 13'\ 52'',6$$

$$B = 4^0\ 55'\ 10'',6$$

$$C = 168^0\ 27'\ 25'',4.$$

139) Bezeichnen r den Radius des in ein Dreieck beschriebenen Kreises, a, b, c die Seiten, p, p', p'' die zugehörigen Höhen, so ist

$$p,\ p',\ p'' = \frac{(a + b + c)^3\ r^3}{a b c} .$$

Es ist

$$p = c \sin B,\ p' = a \sin C,\ p'' = b \sin A,$$

$$\text{folglich } p\ p'\ p'' = a b c \sin A \sin B \sin C.$$

Nun ist

$$(a + b + c)\ r = 2 \triangle\ ABC$$
$$= a b \sin C$$
$$= a c \sin B$$
$$= b c \sin A,$$

$$\text{mithin } (a + b + c)^3\ r^3 = (a b c)^2 \sin A \sin B \sin C$$
$$= a b c\ p\ p'\ p'',$$

$$\text{folglich } p\ p'\ p'' = \frac{(a + b + c)^3\ r^3}{a b c} .$$

140) Ist in dem Dreiecke ABC die Seite $AC = 2\ BC$ und wird sowohl der Winkel C durch CD als auch der durch Verlängerung von AC entstehende Außenwinkel durch CE halbirt, so findet zwischen den Flächeninhalten der gebildeten Dreiecke folgende Beziehung Statt:

$$\triangle\ CBD : \triangle\ ACD : \triangle\ ABC : \triangle\ CDE = 1 : 2 : 3 : 4.$$

Es ist (Fig. 11)

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} = 2$$

folglich $AD = 2\,DB$ und

$$AB = AD + DB = 3\,DB,$$

aber auch $\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB} = 2$

folglich $AE = 2\,BE$ oder

$$BE = AB = 3\,DB$$

und $DE = DB + BE = 4\,DB$, u. s. w.

141) Wenn man über den Seiten eines Dreiecks ABC Quadrate beschreibt und die Mittelpunkte L, M, N dieser Quadrate verbindet, so ist

$$\triangle LMN = \triangle ABC \,.\, \left(1 + \frac{p}{2}\right),$$

wo $p = cot\,A + cot\,B + cot\,C$ gesetzt ist.

Man ziehe (Fig. 12) LC, CM, MA, AN, NB, BL, dann ist

$$\text{Sechseck } LCMANB = \triangle ABC + \triangle LBC + \triangle AMC + \triangle ANB$$

$$= \triangle ABC + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$

aber es ist auch

$$LCMANB = \triangle LMN + \triangle MAN + \triangle NBL + \triangle LCM$$
$$= \triangle LMN + \tfrac{1}{2}\,(MA\,.\,AN \sin MAN + NB\,.\,BL \sin NBL + LC\,.\,CM \sin LCM)$$
$$= \triangle LMN + \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \cos A + \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cos B + \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} \cos C\right)$$
$$= \triangle LMN + \tfrac{1}{4}\,(bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C),$$

mithin

$$\triangle LMN = \triangle ABC - \tfrac{1}{4}(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C)$$
$$+ \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \ldots (1)$$
$$= \triangle ABC - \tfrac{1}{4}(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C)$$
$$= \triangle ABC + \tfrac{1}{4}(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C)$$
$$= \triangle ABC + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{bc}{2}\sin A\cot A + \frac{ac}{2}\sin B\cot B$$
$$+ \frac{ab}{2}\sin C\cot C\Big)$$
$$= \triangle ABC.\left[1 + \tfrac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C)\right]$$
$$= \left(1 + \frac{p}{2}\right).\triangle ABC.$$

Anmerk. Es ist auch

$$\triangle LMN = \triangle ABC - \frac{c^2 + b^2 + c^2}{8} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$
$$= \triangle ABC + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$$
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\,ab\sin C}{8}.$$

L, M, N lassen sich auch ansehen als die Mittelpunkte der über den Seiten des $\triangle ABC$ beschriebenen Halbkreisbögen.

142) Der Kreis, welcher durch irgend drei der Mittelpunkte der vier Berührungskreise eines Dreiecks hindurch geht, hat einen constanten Radius, welcher dem doppelten Radius des um das Dreieck beschriebenen Kreises gleich ist.

Seien *O* (Fig. 13.) der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises beim $\triangle ABC$, O', O'', O''' die Mittelpunkte der drei äußeren, r', r'' die Radien der Kreise O' und O'', so ist

$$O'C = \frac{r'}{\cos\frac{C}{2}},\quad O''C = \frac{r''}{\cos\frac{C}{2}},$$

$$r' = \frac{\triangle}{S - a},\ r'' = \frac{\triangle}{S - b},$$

folglich $O'\,O'' = \left(\frac{\triangle}{S - a} + \frac{\triangle}{S - b}\right) \sec \frac{C}{2}$

$$= \frac{\triangle\, c}{(S - a)\,(S - b) \cos \frac{C}{2}}.$$

Nun sind $A\,O\,O'$, $B\,O\,O''$ gerade Linien, folglich

$$O'\,O\,O'' = A\,O\,B = \pi - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{C}{2}$$

und $O'\,O'''\,O'' = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$,

mithin ist der Radius des durch O, O', O'' gehenden Kreises

$$= \frac{O'\,O''}{2 \sin O'\,O\,O''} = \frac{O'\,O''}{2 \cos \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\triangle\,.\,c}{2\,(S-a)\,(S-b) \cos^2 \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\triangle\,.\,a\,b\,c}{2\,S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}$$

$$= \frac{a\,b\,c}{2\,\triangle} = 2\,R.$$ (Planim. II. §. 70.),

wo R der Radius des um das $\triangle\ A\,B\,C$ beschriebenen Kreises ist.

Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß der Radius eines durch irgend drei andere von den Punkten O, O', O'', O''' gehenden Kreises ebenfalls den Radius $2\,R$ hat.

143) a) Ist O ein Punkt innerhalb eines Dreiecks $A\,B\,C$ von der Beschaffenheit, daß, wenn man ihn mit den Winkelspitzen verbindet, $A\,O\,B = B\,O\,C = C\,O\,A$ ist, so soll

$$\Sigma = O\,A + O\,B + O\,C$$

und $S = O\,A^2 + O\,B^2 + O\,C^2$

gefunden werden.

b) für das rechtwinklige Dreieck ist

$$S = c^2 - \frac{a\,b}{\sqrt{3}}$$

und $\Sigma = \sqrt{c^2 + a\,b\,\sqrt{3}}$.

a) Da $A\,O\,B = B\,O\,C = C\,O\,A = 120^0$ und also $\cos AOB$ etc. $= -\frac{1}{2}$ ist, so hat man, wenn AO, BO, CO mit δ, δ', δ'' bezeichnet werden,

$$\delta^2 + \delta'^2 + \delta\delta' = c^2,$$
$$\delta^2 + \delta''^2 + \delta\delta'' = b^2,$$
$$\delta'^2 + \delta''^2 + \delta'\,\delta'' = a^2;$$

folglich

$$2\,(\delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2) + \delta\delta' + \delta\delta'' + \delta'\delta'' = a^2 + b^2 + c^2 \ldots \text{(I)}.$$

Nun ist

$$\triangle\,A\,O\,B + \triangle\,B\,O\,C + \triangle\,C\,O\,A = \triangle\,A\,B\,C$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}\,\delta\delta' \sin 120 + \tfrac{1}{2}\,\delta\delta'' \sin 120 + \tfrac{1}{2}\,\delta'\,\delta'' \sin 120$$
$$= \sqrt{S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}$$

oder $\delta\delta' + \delta\delta'' + \delta'\delta'' = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}, \ldots$ (II),

und wegen (I)

$$2\,(\delta + \delta' + \delta'')^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 3\,(\delta\delta' + \delta\delta'' + \delta'\delta''),$$

mithin

$$2\,(\delta + \delta' + \delta'')^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3\,S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}$$

oder $\Sigma = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3\,S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}}{2}} \ldots$ (III).

Aus (I) folgt

$$S = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - (\delta\delta' + \delta\delta'' + \delta'\,\delta'')}{2}$$

mithin wegen (II)

$$S = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3} - 4\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{2\sqrt{3}} \ldots \text{(IV)}.$$

b) Ist $C = 90^0$, so ist

$$\sqrt{S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c)} = \frac{a\,b}{2}$$

$$\text{und } a^2 + b^2 + c^2 = 2\,c^2,$$

folglich wegen (III)

$$\Sigma = \sqrt{\frac{2\,c^2 + 2\,a\,b\,\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{c^2 + a\,b\,\sqrt{3}}$$

und wegen (IV)

$$S = \frac{2\,c^2\,\sqrt{3} - 2\,a\,b}{2\,\sqrt{3}} = c^2 - \frac{a\,b}{\sqrt{3}}.$$

144) Auf jeder Seite eines Dreiecks ist $\frac{1}{x}$ derselben nach einerlei Richtung hin abgeschnitten; wie groß ist x zu nehmen, wenn das durch die Abtragungspunkte bestimmte Dreieck gleich dem n^{ten} Theile des ursprünglichen sein soll?

Es seien $A\,B\,C$ (Fig. 14.) das gegebene Dreieck $A\,a = \frac{1}{x}\,A\,B$, $B\,b = \frac{1}{x}\,B\,C$, $C\,c = \frac{1}{x}\,C\,A$ gemacht und a, b, c unter einander verbunden, so ist

$$A\,c = A\,C.\,\frac{x-1}{x}$$

und $\triangle\,A\,c\,a : \triangle\,A\,B\,C = A\,a.\,A\,c : A\,B.\,A\,C$ (Planim. II. §. 38[c].)

$$= x - 1 : x^2,$$

$$\text{folglich } \triangle\,A\,c\,a = \frac{x-1}{x^2}\,.\,\triangle\,A\,B\,C\;\ldots\;(\mathrm{I}).$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\triangle\,B\,a\,b = \frac{x-1}{x^2}\,.\,\triangle\,A\,B\,C\;\ldots\;(\mathrm{II}),$$

$$\triangle\,C\,b\,c = \frac{x-1}{x^2}\,.\,\triangle\,A\,B\,C\;\ldots\;(\mathrm{III}).$$

Addirt man die Ausdrücke unter (I), (II), (III) und subtrahirt die Summe von $\triangle\ ABC$, so erhält man

$$\triangle\ abc = \left(1 - \frac{3\,(x-1)}{x^2}\right) . \triangle\ ABC \ldots \text{(IV)}.$$

Setzt man (IV) nun gleich $\frac{1}{n} . \triangle\ ABC$,

so hat man

$$1 - \frac{3\,(x-1)}{x^2} = \frac{1}{n},$$

$$x^2 - \frac{3n}{n-1} . x + \frac{3n}{n-1} = 0,$$

$$x = \frac{3n - \sqrt{3n\,(4-n)}}{2\,(n-1)}.$$

Aus diesem Ausdrucke ersieht man, daß n nicht größer als 4 sein kann, weil x für $n > 4$ imaginär wird; $\triangle\, abc$ kann demnach nicht kleiner gemacht werden als $\frac{1}{4} \triangle\ ABC$.

145) Ist die Summe zweier Dreiecksseiten $= m$, die dritte Seite $= c$ und ihr Gegenwinkel $= C$ gegeben, so findet man

$$a = m\ cos^2 \frac{\varphi}{2} \text{ und } b = m\ sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

wo φ ein Hülfswinkel ist, welcher durch die Gleichung

$$sin\ \varphi = \pm \frac{1}{m} \sqrt{(m+c)\ (m-c)} .\ sec \frac{C}{2}$$

bestimmt ist.

Es ist

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{S\ (S-c)}{a\,b}} = \sqrt{\frac{(m+c)\ (m-c)}{4\ ab}},$$

folglich $2\sqrt{ab} = \sqrt{(m+c)\ (m-c)} .\ \sec \frac{C}{2}.$

$$= m \sin \varphi,$$

und $4\,ab = m^2 \sin^2 \varphi$,
da nun $(a + b)^2 = m^2$,
so ist $(a - b)^2 = m^2 \cos^2 \varphi$,
oder $a - b = \pm\, m \cos \varphi$.

Weil nun

$$a + b = m,$$

so ist $a = m \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ und $b = m \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

146) In einem Dreiecke sind die Verbindungslinien der drei Winkelspitzen mit demjenigen Punkte, an welchem erstere drei gleiche Winkel bilden, gegeben; es sollen die Seiten und der Inhalt des Dreiecks bestimmt werden.

Es sei O der Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, bei welchem $AOB = AOC = BOC = 120^0$ ist, ferner sei $AO = d$, $BO = d'$, $CO = d''$ gegeben, so ist

$$BC = a = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2\,BO.\,OC \cos BOC},$$

und weil $\cos BOC = -\frac{1}{2}$ ist,

$$a = \sqrt{d'^2 + d''^2 + d'd''}, \text{ und entsprechend}$$
$$b = \sqrt{d^2 + d''^2 + dd''},$$
$$c = \sqrt{d^2 + d'^2 + dd'}.$$

Ferner ist

$$\triangle\, ABC = \triangle\, AOB + \triangle\, AOC + \triangle\, BOC$$
$$= \tfrac{1}{2}\, dd' \sin 120^0 + \tfrac{1}{2}\, dd'' \sin 120^0 + \tfrac{1}{2}\, d'd'' \sin 120^0$$
$$= \tfrac{1}{4}\,(dd' + dd'' + d'd'')\sqrt{3}.$$

147) Aus der Summe zweier Seiten $a + b = s$ und ihren Gegenwinkeln A und B das Dreieck zu berechnen.

Es ist

$$a : b = \sin A : \sin B \quad (55),$$

$$(a + b =)\ s : a = \sin A + \sin B : \sin A$$

$$= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} : \sin A \quad (35),$$

$$\text{I)}\ a = \frac{s \sin A}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}},$$

analog $$\text{II)}\ b = \frac{s \sin B}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}},$$

$$c = \frac{s \sin C}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}.$$

$$= \frac{2 s \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} \quad (27),$$

$$\text{III)}\ c = \frac{s \cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}$$

Ferner ist

$$\text{IV)}\ \triangle = \frac{s^2 \sin A \sin B \sin C}{8 \sin^2 \frac{A+B}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}},$$

$$= \frac{s^2 \sin A \sin B \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{4 \sin^2 \frac{A+B}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}} \quad (27)$$

$$= \frac{s^2 \sin A \sin B \cot \frac{A+B}{2}}{4 \cos^2 \frac{A-B}{2}}.$$

148) Aus dem Unterschiede zweier Seiten $(a - b = d)$ und ihren Gegenwinkeln (A und B) das Dreieck zu berechnen.

Es ist

$$a - b : a = \sin A - \sin B : \sin A,$$

$$d : a = 2 \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2} : \sin A,$$

$$\text{I)}\ a = \frac{d \sin A}{2 \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}}.$$

$$\text{II)}\ b = \frac{d \sin B}{2 \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}}$$

$$\text{III)}\ c = \frac{d \sin \frac{A + B}{2}}{\sin \frac{A - B}{2}}$$

$$\text{IV)}\ \triangle = \frac{d^2 \sin A \sin B \operatorname{tg} \frac{A + B}{2}}{4 \sin^2 \frac{A - B}{2}}.$$

149) Aus einer Seite (a), ihrem Gegenwinkel (A) und der Summe der beiden andern Seiten $(b + c = s)$ das Dreieck zu berechnen.

Es ist

$$b + c : a = \sin B + \sin C : \sin A$$

$$= 2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2} : 2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B + C}{2} \ (35 \text{ u. } 27)$$

$$\text{oder } s : a = \cos \frac{B - C}{2} : \cos \frac{B + C}{2},$$

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{s\cos\frac{B+C}{2}}{a}$$

$$=\frac{s\sin\frac{A}{2}}{a}$$

(Ergiebt sich auch aus §. 147. III.)

150) Aus einer Seite (a), ihrem Gegenwinkel (A) und der Differenz der beiden andern Seiten ($b-c=d$) das Dreieck zu berechnen.

Es ist

$$b-c:a=\sin B-\sin C:\sin A$$

$$=2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}:2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$\text{oder } d:a=\sin\frac{B-C}{2}:\sin\frac{B+C}{2},$$

$$\sin\frac{B-C}{2}=\frac{d\sin\frac{B+C}{2}}{a}$$

$$=\frac{d\cos\frac{A}{2}}{a}$$

151) Aus einer Seite (a), einem ihr anliegenden Winkel (B) und der Summe der beiden andern Seiten ($b+c=s$) das Dreieck zu berechnen.

Es ist

$$b+c:a=\sin B+\sin C:\sin A$$

$$\text{oder } s:a=\cos\frac{B-C}{2}:\cos\frac{B+C}{2},$$

folglich

$$\frac{s+a}{s-a} = \frac{\cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \quad (25 \text{ u. } 26)$$

$$= \frac{\cot\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}},$$

also $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{s-a}{s+a} \cdot \cot\frac{B}{2}$.

152) Aus einer Seite (a), dem ihr anliegenden Winkel (B) und der Differenz der beiden anderen Seiten $(b - c = d)$ das Dreieck zu berechnen.

Es ist

$$b - c : a = \sin B - \sin C : \sin A$$

oder $d : a = \sin\frac{B-C}{2} : \sin\frac{B+C}{2}$,

folglich

$$\frac{a+d}{a-d} = \frac{\sin\frac{B+C}{2} + \sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2} - \sin\frac{B-C}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{a - d}{a + d} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

153) Aus der Summe aller drei Seiten $(a + b + c = s)$ und den Winkeln $(A, B$ und folglich auch $C)$ das Dreieck zu berechnen.

Es ist

$$b + c : a = \cos \frac{B - C}{2} : \cos \frac{B + C}{2} \quad (\S.\ 149)$$

$$a + b + c : a = \cos \frac{B - C}{2} + \cos \frac{B + C}{2} : \cos \frac{B + C}{2},$$

$$s : a = 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} : \sin \frac{A}{2},$$

$$I)\ a = \frac{s \sin \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

$$II)\ b = \frac{s \sin \frac{B}{2}}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

$$III)\ c = \frac{s \sin \frac{C}{2}}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}.$$

$$IV)\ \triangle = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{s^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin C}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} \quad (57)$$

$$= \tfrac{1}{4} s^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

154) Aus dem Ueberschusse der Summe zweier Seiten über die dritte $(b + c - a = d)$ und den Winkeln das Dreieck zu berechnen.

Es ist

$$b + c : a = \cos\frac{B - C}{2} : \cos\frac{B + C}{2},$$

$$b + c - a : a = \cos\frac{B - C}{2} - \cos\frac{B + C}{2} : \cos\frac{B + C}{2}$$

$$d : a = 2 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} : \sin\frac{A}{2}$$

$$I)\ a = \frac{d \sin\frac{A}{2}}{2 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}.$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$= \frac{d \sin\frac{A}{2} \sin B}{2 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \sin A}$$

oder $II) = \dfrac{d \cos\frac{B}{2}}{2 \cos\frac{A}{2} \sin\frac{C}{2}}.$

$$III)\ c = \frac{d \cos\frac{C}{2}}{2 \cos\frac{A}{2} \sin\frac{C}{2}}.$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \sin A}{4 \cos^2\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{d^2 \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \sin\frac{A}{2}}{4 \cos\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\, d^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cot\frac{B}{2} \cot\frac{C}{2}.$$

155) Aus einem Winkel (A) und den auf der Gegenseite durch die Höhe gebildeten Abschnitten $(a_1$ und $a_2)$ das Dreieck zu berechnen.

Ist a_1 der am Winkel C liegende Abschnitt, so ist

$$a_1 = b \cos C,$$

$$a_2 = c \cos B,$$

folglich $a_1 : a_2 = b \cos C : c \cos B,$

nun ist $b : c = \sin B : \sin C$ (55)

und mithin nach Zusammensetzung beider Proportionen

$$a_1 : a_2 = \sin B \cos C : \cos B \sin C,$$

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} = \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin B \cos C - \cos B \sin C}$$

$$= \frac{\sin(B + C)}{\sin(B - C)},$$

daher $\sin(B - C) = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \cdot \sin(B + C)$

$$= \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \cdot \sin A.$$

156) Aus der Differenz der durch die Höhe gebildeten Abschnitte einer Seite $(a_1 - a_2 = d)$ und den an der Seite liegenden Winkeln $(B$ und $C)$ das Dreieck zu berechnen.

Die Summe der beiden Abschnitte kann leicht aus voriger Entwickelung erhalten werden, es ist nämlich

$$a_1 + a = (a_1 - a_2)\,\frac{\sin(B + C)}{\sin(B - C)}$$

$$= d.\,\frac{\sin(B + C)}{\sin(B - C)}.$$

157[a]) Aus den durch die Höhe gebildeten Abschnitten einer Seite (a_1 und a_2) und einer anderen Seite (b) das Dreieck zu berechnen.

Ist a_1 der an C liegende Abschnitt und bezeichnet x einstweilen die Höhe des Dreiecks, so ist

$$\operatorname{tg} B = \frac{x}{a_1} = \frac{\sqrt{b^2 - a_2^{\,2}}}{a_1}$$

$$= \frac{\sqrt{(b + a_2)(b - a_2)}}{a_1}$$

und $\triangle = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\sqrt{(b + a_2)(b - a_2)}$.

157[b]) Aus dem Unterschiede der durch die Höhe gebildeten Abschnitte einer Seite ($a_1 - a_2 = d$) und den beiden anderen Seiten (b und c) das Dreieck zu berechnen.

Ist wieder a_1 der an C liegende Abschnitt, so ist

$$b^2 - a_2^{\,2} = c^2 - a_1^{\,2}$$

$$a_1^{\,2} - a_2^{\,2} = c^2 - b^2$$

$$(a_1 + a_2)\,d = (c + b)(c - b)$$

$$I)\ (a_1 + a_2) = \frac{(c + b)(c - b)}{d}.$$

Da nun

$$a_1 - a_2 = d$$

so ist $2\,a_1 = d + \dfrac{c^2 - b^2}{d}$

$$= \frac{d^2 + c^2 - b^2}{d},$$

$$II)\ a_1 = \frac{d^2 + c^2 - b^2}{2\,d}.$$

Ferner ist

$$\cos B = \frac{a_1}{c},$$

$$1 - \cos B = \frac{c - a_1}{c} = 2 \sin^2 \frac{B}{2},$$

$$\text{alſo } \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c - a_1}{2\,c}}$$

oder wegen *(II)*

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c - \dfrac{d^2 + c^2 - b^2}{2\,d}}{2\,c}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{2\,c\,d - d^2 - c^2 + b^2}{c\,d}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 - (c - d)^2}{c\,d}}$$

$$\text{oder } III)\ \sin \frac{B}{2} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(b + c - d)\,(b - c + d)}{c\,d}}.$$

Aus *I)* und $a_1 - a_2 = d$ erhält man ferner

$$2\,a_2 = \frac{c^2 - b^2}{d} - d$$

$$IV)\ a_2 = \frac{c^2 - b^2 - d^2}{2\,d},$$

$$\cos C = \frac{a_2}{b},$$

$$1 - \cos C = \frac{b - a_2}{b}$$

$$2 \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{b - a_2}{b}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{b - a_2}{2c}}$$

oder wegen *(IV)*

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{b - \dfrac{c^2 - b^2 - d^2}{2d}}{2c}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2bd - c^2 + b^2 + d^2}{cd}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(b + d)^2 - c^2}{cd}}$$

$$V)\ \sin\frac{C}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(b + d + c)\,(b + d - c)}{cd}}.$$

158) Aus der Differenz der durch die Höhe auf einer Seite gebildeten Abschnitte ($a_1 - a_2 = d$), der Differenz der beiden andern Seiten ($b - c = d_1$) und der Differenz ihrer Gegenwinkel ($B - C = \delta$) das Dreieck zu berechnen.

Es sei jetzt a_1 der an der Seite b liegende Abschnitt, so ist

$$b^2 - a_1{}^2 = c^2 - a_2{}^2,$$

$$b^2 - c^2 = a_1{}^2 - a_2{}^2$$

$$(b + c)\,(b - c) = (a_1 + a_2)\,(a_1 - a_2)$$

$$(b + c)\,d_1 = (a_1 + a_2)\,d$$

$$d : d_1 = b + c : a_1 + a_2$$

$$= \cos\frac{B - C}{2} : \cos\frac{B - C}{2}\ \text{(s. § 153.)}$$

oder $d : d_1 = \cos\dfrac{\delta}{2} : \sin\dfrac{A}{2}$;

folglich $\sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{d_1}{d} \cdot \cos\dfrac{\delta}{2}$.

159) Aus einer Seite (a), der ihr zugehörigen Höhe (h) und der Summe der beiden andern Seiten ($b + c = s$) das Dreieck zu berechnen.

Nach (59) und (60) ist, wenn S die halbe Summe aller drei Seiten bezeichnet

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$$

$$= \frac{\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{S(S-a)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} ha}{S(S-a)}$$

Nun ist

$$S = \frac{b+c+a}{2} = \frac{s+a}{2}$$

und also

$$S - a = \frac{s-a}{2},$$

$$\text{also } \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\frac{1}{2} ha}{\frac{1}{4}(s+a)(s-a}$$

$$= \frac{2ha}{(s+a)(s-a)}$$

160) Aus einer Seite (a), der ihr zugehörigen Höhe (h) und der Differenz der beiden andern Seiten ($b - c = d$) das Dreieck zu berechnen.

Es ist

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$$

$$= \frac{(S-b(S-c)}{\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$$

$$= \frac{(S - b)(S - c)}{\frac{1}{2} h a}.$$

Nun ist

$$S - b = \frac{a - b + c}{2}$$

$$= \frac{a - (b - c)}{2}$$

$$= \frac{a - d}{2}$$

und $S - c = \dfrac{a + b - c}{2}$

$$= \frac{a + d}{2}$$

folglich $\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = \dfrac{(a + d)(a - d)}{2 h a}$.

161) In einem Dreiecke sind gegeben die Summe zweier Seiten ($a + b = s$) die zur dritten gehörige Höhe (h) und die Differenz der durch letztere auf der Grundlinie gebildeten Abschnitte ($c_1 - c_2 = d$); es sollen die Seiten des Dreiecks berechnet werden.

Bezeichnet c_1 den an a liegenden Abschnitt, so ist

$$\sqrt{a^2 - h^2} - \sqrt{b^2 - h^2} = d,$$

$$\sqrt{a^2 - h^2} = d + \sqrt{b^2 - h^2},$$

$$a^2 - h^2 = d^2 + 2d\sqrt{b^2 - h^2} + b^2 - h^2,$$

$$a^2 - b^2 - d^2 = 2d\sqrt{b^2 - h^2},$$

$$s(a - b) - d^2 = 2d\sqrt{b^2 - h^2},$$

oder weil $a = s - b$,

$$s(s - 2b) - d^2 = 2d\sqrt{b^2 - h^2} \ldots (\alpha),$$

$$s^2 - 2bs - d^2 = 2d\sqrt{b^2 - h^2}$$

$$4s^2b^2 - 4bs(s^2 - d^2) + (s^2 - d^2)^2 = 4d^2b^2 - 4d^2h^2$$

$$4(s^2 - d^2)\,b^2 - 4sb\,(s^2 - d^2) + (s^2 - d^2)^2 + 4\,d^2h^2 = 0,$$

$$b^2 - sb + \frac{(s^2 - d^2)^2 + 4\,d^2h^2}{4\,(s^2 - d^2)} = 0,$$

$$b = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{(s^2 - d^2)^2 + 4\,d^2h^2}{4\,(s^2 - d^2)}}$$

$$= \frac{s}{2} \pm \frac{d}{2}\sqrt{1 - \frac{4\,h^2}{s^2 - d^2}} \ldots (\beta);$$

$$a = \frac{s}{2} \mp \frac{d}{2}\sqrt{1 - \frac{4\,h^2}{s^2 - d^2}}$$

Endlich ist

$$c = \sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}$$

$$= d + 2\sqrt{b^2 - h^2} \text{ und wegen } (\alpha)$$

$$= \frac{s^2 - 2\,sb}{d} \text{ und wegen } (\beta)$$

$$= s\sqrt{1 - \frac{4\,h^2}{s^2 - d^2}}\,.$$

162) Aus zwei Winkeln (A und B) und dem Radius (r) des eingeschriebenen Kreises das Dreieck zu berechnen.

Es ist, wenn R der Radius des eingeschriebenen Kreises bezeichnet,

$$a = 2\,R \sin A \quad (64)$$

$$\text{und } R = \frac{r}{4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}} \quad (\S.\ 93),$$

folglich

$$a = \frac{r \sin A}{2 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{r \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

und analog

$$b = \frac{r \cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$c = \frac{r \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}.$$

$$\triangle = r^2 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

Zusatz. Sind r', r'', r''' die Radien der drei äußeren Berührungskreise, so erhält man, wenn einer von diesen statt r gegeben wäre:

$$a = \frac{r' \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

$$a = \frac{r'' \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

$$a = \frac{r''' \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Beispiel 1. Gegeben $A = 36^0$ $B = 47^0$, $r = 20$.

Es ist

$$a = \frac{20 \cos 18^0}{\sin 43^0\ 30' \sin 48^0\ 36'}$$

$$
\begin{array}{rl}
\log 20 &= 1{,}3010300 \\
\log \cos 18^0 &= 9{,}9782063 - 10 \\
\hline
& 1{,}2792363 \ldots (\alpha) \\
\log \sin 43^0\ 30' &= 9{,}8378122 - 10 \\
\log \sin 48^0\ 30' &= 9{,}8744561 - 10 \\
\hline
& 0{,}7122683 - 1 \ldots (\beta)
\end{array}
$$

Wird (β) von (α) subtrahirt, so erhält man

$$\log a = 1{,}5669680$$
$$a = 36{,}895$$

Beispiel 2. Gegeben $A = 36^0$, $B = 47^0$, $r' = 20$.

Es ist

$$a = \frac{20 \cos 18^0}{\cos 43^0\ 30' \cos 48^0\ 30'}$$

$$
\begin{array}{rl}
\log \cos 43^0\ 30' &= 9{,}8605622 - 10 \\
\log \cos 48^0\ 30' &= 9{,}8212646 - 10 \\
\hline
& 0{,}6818268 - 1 \ldots (\gamma)
\end{array}
$$

Wird (γ) von (α) abgezogen, so erhält man

$$\log a = 1{,}5974095$$
$$a = 39{,}574.$$

163) Aus einer Seite (a) der Summe der beiden andern ($b + c = s$) und dem Radius (r) des eingeschriebenen Kreises das Dreieck zu berechnen.

Ist O (Fig. 15) der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, so erhält man, wenn man den Radius Oc zieht und O mit der Winkelspitze A verbindet,

$$r = Oc = Ac \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Nun ist aber

$$2 Ac = Ac + Ab = b + c - a,$$
$$= s - a,$$

folglich ist

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{2r}{s - a}.$$

Beispiel. Gegeben: $r = 13{,}7$; $s = 47{,}2$; $a = 31{,}5$.

$$\text{tg}\,\frac{A}{2} = \frac{27{,}4}{15{,}7}$$

$$\begin{aligned} \log 27{,}4 &= 1{,}4377506 \\ \log 15{,}7 &= 1{,}1958997 \\ \hline \log \text{tg}\,\frac{A}{2} &= 10{,}2418509 - 10 \\ \frac{A}{2} &= 60^0\ 11'\ 15'',4 \\ A &= 120^0\ 22'\ 30'',8. \end{aligned}$$

164) Aus einer Seite (a) der Differenz der beiden andern ($b - c = d$) und dem Radius (r) des eingeschriebenen Kreises das Dreieck zu berechnen.

Es ist (Fig. 15.), wenn man noch OB zieht,

$$r = Oc = Bc\ \text{tg}\,\frac{B}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{und } 2\,Bc &= a + c - b \\ &= a - (b - c) \\ &= a - d, \end{aligned}$$

$$\text{folglich } I)\ \text{tg}\,\frac{B}{2} = \frac{2r}{a - d}.$$

Ferner ist, wenn man den Radius Oa zieht und O mit C verbindet,

$$r = Oa = Ca\ \text{tg}\,\frac{C}{2},$$

$$\begin{aligned} 2\,Ca &= a + b - c \\ &= a + d, \end{aligned}$$

$$\text{folglich } II)\ \text{tg}\,\frac{C}{2} = \frac{2r}{a + d}.$$

Beispiel. Gegeben: $a = 0{,}325$; $r = 0{,}02$; $d = 0{,}1$.

$$I)\ \text{tg}\,\frac{B}{2} = \frac{0{,}04}{0{,}225} = \frac{40}{225}$$

$$\begin{aligned} \log 40 &= 1{,}6020600 \\ \log 225 &= 2{,}3521825 \\ \hline \log \text{tg}\,\frac{B}{2} &= 9{,}2498775 - 10 \end{aligned}$$

$$\frac{B}{2} = 10^0\ 4'\ 50'',\ 1$$

$$B = 20^0\ 9'\ 40'',\ 2.$$

$$II)\ \text{tg}\ \frac{C}{2} = \frac{0{,}04}{0{,}425} = \frac{40}{425}.$$

$$\log 40 = 1{,}6020600$$

$$\log 425 = 2{,}6283889$$

$$\log\ \text{tg}\ \frac{C}{2} = 8{,}9736711 - 10$$

$$\frac{C}{2} = 5^0\ 22'\ 36'',\ 1$$

$$C = 10^0\ 45'\ 12'',\ 2.$$

165) Ein Dreieck aus seinen drei Höhen (α, β, γ) zu berechnen.

Es ist

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = 2\triangle,$$

folglich $\frac{a}{c} = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{b}{c} = \frac{\gamma}{\beta}$.

Nun ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A\ (56),$$

folglich, wenn beide Seiten durch c^2 dividirt werden

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} + 1 - 2\,\frac{b}{c} \cos A$$

oder nach Substitution der Werthe für $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} + 1 - \frac{2\gamma}{\beta} \cos A,$$

$$\frac{2\gamma}{\beta} \cos A = 1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}$$

$$= \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2},$$

$$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta\gamma} - \frac{\beta\gamma}{2\,\alpha^2},$$

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{-\beta^2 - \gamma^2 + 2\beta\gamma}{2\beta\gamma} + \frac{\beta\gamma}{2\alpha^2}$$

$$= \frac{\beta\gamma}{2\alpha^2} - \frac{(\beta - \gamma)^2}{2\beta\gamma}$$

$$4 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2} \left[1 - \frac{\alpha^2 (\beta - \gamma)^2}{\beta^2 \gamma^2}\right].$$

$$I) \sin \frac{A}{2} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha^2} \left[1 - \frac{\alpha^2 (\beta - \gamma)^2}{\beta^2\gamma^2}\right]}.$$

Man hat ferner

$$1 + \cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma}{2\beta\gamma} - \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(\beta + \gamma)^2}{2\beta\gamma} - \frac{\beta\gamma}{\alpha^2},$$

$$4 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(\beta + \gamma)^2}{\beta\gamma} \left[1 - \frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2 (\beta + \gamma)^2}\right]$$

$$II) \cos \frac{A}{2} = \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma) \sqrt{\frac{1}{\beta\gamma} \left\{1 - \frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2 (\beta + \gamma)^2}\right\}}.$$

Aus I) und II) ergiebt sich, daß die Aufgabe nur möglich ist, wenn die Subtrahenden in den Parenthesen ächte Brüche sind, d. h. wenn $\alpha(\beta - \gamma) < \beta\gamma$ und gleichzeitig $\alpha(\beta + \gamma) > \beta\gamma$ ist. Es ließ sich diese Bedingung übrigens von vornherein erkennen. Es ist nämlich

$$b + c > a$$

$$\text{oder } \frac{b}{c} + 1 > \frac{a}{c},$$

$$\text{deßhalb } \frac{\gamma}{\beta} + 1 > \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\alpha (\beta + \gamma) > \beta\gamma;$$

$$\text{ferner } c - b < a$$

$$\text{mithin } 1 - \frac{b}{c} < \frac{a}{c}$$

und deßhalb $1 - \frac{\gamma}{\beta} < \frac{\gamma}{\alpha}$

$$\alpha\,(\beta - \gamma) < \beta\gamma.$$

Man kann deßhalb in *I*)

$$III)\quad \frac{\alpha\,(\beta - \gamma)}{\beta\gamma} = \sin\varphi$$

und in *II*)

$$IV)\quad \frac{\beta\gamma}{\alpha\,(\beta + \gamma)} = \sin\psi$$

setzen und erhält hierdurch

$$V)\ \sin\frac{A}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\,(1 - \sin\varphi^2)}$$

$$= \frac{\cos\varphi}{2\,\alpha}\sqrt{\beta\gamma}.$$

und $VI)\ \cos\frac{A}{2} = \frac{(\beta + \gamma)\cos\psi}{2\sqrt{\beta\gamma}}$

Beispiel. Gegeben $\alpha = 10,\ \beta = 13,\ \gamma = 7$. Setzt man diese Werthe in III) ein, so erhält man

$$\sin\varphi = \frac{60}{91}.$$

$$\log 60 = 1{,}7781513$$
$$\log 91 = 1{,}9590414$$
$$\log\sin\varphi = 9{,}8191099 - 10$$
$$\varphi = 41^0\ 14'\ 58'',\ 58;$$

es ist deßhalb nach V.

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{\cos 41^0\ 14'\ 58'',\ 58\ \sqrt{91}}{20}.$$

$$\log\cos\varphi = 9{,}8761280 - 10$$
$$\log\sqrt{91} = 0{,}9795207$$
$$10{,}8556487 - 10$$
$$\log 20 = 1{,}3010300$$
$$\log\sin\frac{A}{2} = 9{,}5546187 - 10$$

$$\frac{A}{2} = 21^0\ 0'\ 52'',8$$
$$A = 42^0\ 1'\ 45'',6.$$

Rechnet man IV) und VI), so ist

$$\sin\,\psi = \frac{91}{200}.$$

Wird hieraus $\cos\,\psi$ sofort bestimmt, so hat man

$$\sin^2\,\psi = \frac{8281}{40000}$$
$$1 - \sin^2\,\psi = 1 - \frac{8281}{40000}$$
$$= \frac{31719}{40000} = \cos^2\,\psi,$$
$$\cos\,\psi = \frac{\sqrt{31719}}{200};$$

mithin nach VI)

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{20.\,\dfrac{\sqrt{31719}}{200}}{2\sqrt{91}}$$
$$= \frac{1}{20}\sqrt{\frac{31719}{91}}.$$

$$\log 31719 = 4{,}5013195$$
$$\log 91 = 1{,}9590414$$
$$2{,}5422781$$
$$2)\ \overline{}$$
$$1{,}2711390$$
$$\log 20 = 1{,}3010300$$
$$\log\cos\frac{A}{2} = 9{,}9701090 - 10$$
$$\frac{A}{2} = 21^0\ 0'\ 52'',8.$$
$$A = 42^0\ 1'\ 45'',6.$$

166) Von einem Dreiecke ist gegeben eine Seite (c) die an den Mittelpunkt dieser Seite gezogene Transversale (t) und der Winkel an der Spitze (C) $= 120^0$. Das Dreieck soll berechnet werden.

Es sei (Fig. 16) $AB = c$, $ACB = 120^0$, D Mittelpunkt von AB, $CD = t$, so ist

$$t^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

$$\text{oder } a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2\,t^2 \;\ldots\; (1);$$

und weil

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos 120^0.$$
$$= a^2 + b^2 + ab;$$

so ist

$$ab = \frac{c^2}{2} - 2\,t^2,$$

$$2\,ab = c^2 - 4\,t^2 \;\ldots\; (2).$$

Durch Addition und Subtraction von (1) und (2) erhält man

$$(a + b)^2 = \frac{3\,c^2}{2} - 2\,t^2,$$

$$(a - b)^2 = 6\,t^2 - \frac{c^2}{2},$$

und hieraus

$$a = \sqrt{\frac{3\,c^2 - 4\,t^2}{8}} \pm \sqrt{\frac{12\,t^2 - c^2}{8}},$$

$$b = \sqrt{\frac{3\,c^2 - 4\,t^2}{8}} \mp \sqrt{\frac{12\,t^2 - c^2}{8}}$$

$$\text{und } \triangle\, ABC = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot ab$$
$$= \frac{c^2 - 4\,t^2}{8} \cdot \sqrt{3}.$$

167) Ueber den Seiten eines Dreiecks sind nach außen Halbkreise beschrieben und die Mittelpunkte der Halbkreisbögen verbunden, es sollen die Seiten und der Inhalt des hierdurch gebildeten Dreiecks berechnet werden.

Ist ABC (Fig. 17) das gegebene Dreieck und sind A', B', C' die Mittelpunkte der Halbkreisbögen, die auf den Dreiecksseiten stehen, dann ist, wenn AB', AC' gezogen werden, $B'AC = 45^0$, $C'AB = 45^0$, folglich, wenn a, b, c die Seiten des $\triangle ABC$ und a', b', c' die des $\triangle A'B'C'$ bezeichnen,

$$AB' = \frac{b}{\sqrt{2}},\ AC' = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

$$B'AC' = B'AC = 90 + A,$$

$$(B'C')^2 = a'^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - bc \cos(90 + A)$$

$$\text{oder } a'^2 = \frac{b^2 + c^2 + 2bc \sin A}{2},$$

$$\text{und analog } b'^2 = \frac{a^2 + c^2 + 2ac \sin B}{2},$$

$$c'^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \sin C}{2}.$$

Um den Inhalt des $\triangle A'B'C'$ zu finden, hat man

$$AB'CA'BC' = \triangle A'B'C' + \tfrac{1}{4}(bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C)$$

$$= \triangle ABC + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

Nun ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} = \tfrac{1}{4}(bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C)$$

folglich

$$\triangle A'B'C' + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} = \triangle ABC + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4},$$

$$\triangle A'B'C' = \triangle ABC + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4ab \sin C}{8}.$$

168) Liegen die Winkelspitzen eines gleichseitigen Dreiecks in drei parallelen Geraden, deren mittlere von den beiden anderen die Abstände a und b hat, so ist die Seite des Dreiecks

$$= 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$

Es sei ABC (Fig. 18.) das Dreieck, so ist, wenn man $BAD = \varphi$ setzt,

$$CAD = 60 - \varphi,$$

und wenn $AB = x$ gesetzt wird,

$$x \sin\varphi = a,$$

$$x \sin(60 - \varphi) = b,$$

folglich $$\frac{\sin(60 - \varphi)}{\sin\varphi} = \frac{b}{a},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.\cot\varphi - \frac{1}{2} = \frac{b}{a},$$

$$a \cot\varphi = \frac{2b + a}{\sqrt{3}},$$

mithin $$x = a \operatorname{cosec}\varphi$$

$$= \sqrt{a^2 + \frac{4b^2 + 4ab + a^2}{3}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$

169) In einem rechtwinkligen Dreiecke ABC sind von der Spitze des rechten Winkels C die Linien CD, CE gezogen, welche mit der Hypotenuse die Winkel α, β machen, es wird behauptet, daß der Inhalt des Dreiecks

$$CDE = \frac{a^2 b^2}{2^2 c}(\cot\alpha - \cot\beta)$$

sei.

Ist $CDB = \alpha$ (Fig. 19.) $CEB = \beta$, so ist

$$CE = \frac{a \sin B}{\sin \beta},\ CD = \frac{a \sin B}{\sin \alpha}$$

und $ECD = \beta - \alpha$,

$$\text{folglich } \triangle\, CDE = \tfrac{1}{2}\, CD.\, CE.\, \sin ECD$$

$$= \frac{a^2 \sin^2 B \sin (\beta - \alpha)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$$

$$= \frac{a^2\, b^2}{2\, c^2} (\cot \alpha - \cot \beta).$$

170) Wenn man über der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks wieder ein gleichseitiges Dreieck construirt, über der Höhe des jetzt erhaltenen wieder ein solches u. s. f., so ist die Summe aller auf die angegebene Art entstandenen Dreiecke gleich dem dreifachen Inhalte des Urdreiecks.

Bezeichnet a die Seite und h die Höhe des ursprünglichen Dreiecks und sind die Flächeninhalte des Urdreiecks sowie die durch die angegebene Construktion entstandenen, bezüglich $\triangle$, δ_1, δ_2, δ_3 u. s. f.,

$$\text{so ist } \triangle : \delta_1 = a^2 : h^2$$

$$= 1 : \sin^2 60$$

$$= 1 : \tfrac{3}{4}\ (17)$$

$$\delta_1 = \tfrac{3}{4} \triangle;$$

und analog

$$\delta_2 = \tfrac{3}{4}\, \delta_1$$

$$\delta_3 = \tfrac{3}{4}\, \delta_2 \text{ u. s. f.}$$

folglich

$$\Sigma\, \delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots = [\tfrac{3}{4} + (\tfrac{3}{4})^2 + (\tfrac{3}{4})^3 \ldots.] \triangle$$

$$= \left(\frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}}\right) \triangle\ ^{*})$$

$$\Sigma\, \delta = 3 \triangle.$$

---

*) S. mein Lehrbuch der Arithmetik. 2. Auflage §. 124 und Algebraische Analysis §. 63.

171) Wenn man von einem Eckpunkte eines Winkels aus auf den drei anstoßenden Kanten drei Punkte A, B, C so wählt, daß ihre Abstände vom Eckpunkte die Größen a, b, c haben, so ist

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}.$$

Setzt man $AB = a'$, $AC = b'$, $BC = c'$,

so ist $a' = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$b' = \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$c' = \sqrt{b^2 + c^2},$$

und $\triangle ABC = \dfrac{a'\,b'}{2} \,.\, \sin ACB$

$$= \frac{a'\,b'}{2}\sqrt{1 - .\left(\frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{2a'\,b'}\right)^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{4\,a'^2\,b'^2 - (a'^2 + b'^2 - c'^2)^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{4\,(a^2 + b^2)\,(a^2 + c^2) - (2\,a^2)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}.$$

172) Es ist der Abstand (c) zweier Punkte von einander, sowie deren Abstände (a und b) von einer gegebenen Geraden gegeben, es wird behauptet, daß von allen Dreiecken, welche c zur Grundlinie und ihre Scheitel in der gegebenen Geraden haben, dasjenige, welches den kleinsten Umfang hat, den Flächeninhalt

$$\frac{ab}{a + b}\sqrt{(c + a - b)\,(c + b - a)}$$

hat.

Sind A, B (Fig. 20) die zwei gegebenen Punkte, AM, BN deren Abstände von der Geraden MN und C die in MN liegende Spitze des Dreiecks, so ist $AM = a$, $BN = b$, und weil $AC + BC$ ein Minimum sein soll (s. mein Lehrb. der Planimetrie. 2. Cursus. 3. Aufl. Anhang 2.),

$$ACM = BCN = \theta,$$

folglich

$$MN = (a + b) \cot \theta \text{ und}$$

$$(a + b)^2 \cot^2 \theta = c^2 - (b - a)^2.$$

Nun ist

$$\triangle ABC = AMNB - \triangle ACM - \triangle BCN$$

$$= \frac{a + b}{2} MN - \frac{AM.MC}{2} - \frac{BN.NC}{2}$$

$$= \frac{(a + b)^2}{2} \cot \theta - \frac{a^2}{2} \cot \theta - \frac{b^2}{2} \cot \theta$$

$$= ab \cot \theta = \frac{ab}{a + b} \sqrt{c^2 - (b - a)^2}$$

$$= \frac{ab}{a + b} \sqrt{(c + b - a)(c + a - b)}.$$

Sechstes Kapitel.

Tabelle für allgemeine Dreiecke.

Nachstehende Tabelle, in welcher a, b, zwei Seiten c_1, c_2 die durch die Höhe h auf der dritten gebildeten Abschnitte, A, B, C die Winkel, R und r bezüglich die Radien des um- und eingeschriebenen Kreises beim Dreieck ($\triangle$) bedeuten, bietet eine reiche Auswahl von Zahlenbeispielen der verschiedensten Art.

Allgemeine Dreiecke.

a	b	c_1	c_2	h	$\triangle$	R	r	A	B	C
37	13	35	+ 5	12	240	20,0417	5,3333	67°22′48″,5	18°55′28″,7	93°41′42″,8
37	13	35	— 5	12	180	20,0417	4,5	112 36 11, 5	18 55 28, 7	48 27 19, 8
145	25	143	+ 7	24	1800	75,5208	11,25	73 44 23, 3	9 31 38, 2	96 43 58, 5
145	25	143	— 7	24	1632	75,5208	10,6666	106 14 36, 7	9 31 38, 2	64 12 45, 1
101	29	99	+ 21	20	1200	73,225	9,6	43 36 10, 1	11 25 16, 3	124 58 33, 6
101	29	99	— 21	20	780	73,225	7,5	136 23 49, 9	11 25 16, 3	32 10 53, 8
401	41	399	+ 9	40	8160	205,5125	19,2	77 19 10, 6	5 43 29, 3	96 57 20, 1
401	41	399	— 9	40	7800	205,5125	18,75	102 40 49, 4	5 43 29, 3	71 35 41, 3
197	53	195	+ 45	28	3360	186,4464	13,7143	31 53 26, 8	8 10 16, 4	139 56 16, 8
197	53	195	— 45	28	2100	186,4464	10,5	148 6 33, 2	8 10 16, 4	23 43 10, 4
577	73	575	+ 55	48	15120	438,7604	23,625	41 6 43, 5	4 46 18, 8	134 6 57, 7
577	73	575	— 55	48	12480	438,7604	21,3333	138 53 16, 5	4 46 18, 8	36 20 24, 7
221	149	171	+ 51	140	15540	117,6034	52,5	69 59 2, 5	39 18 27, 5	70 42 30
221	149	171	— 51	140	8400	117,6034	34,1463	110 0 57, 5	39 18 27, 5	30 40 35
485	125	483	+ 117	44	13200	688,9205	21,8181	20 36 34, 9	5 12 18, 4	154 11 6, 7
485	125	483	— 117	44	8052	688,9205	16,5	159 23 25, 1	5 12 18, 4	15 24 16, 5
509	221	459	+ 21	220	52800	255,6568	87,2727	84 32 50, 5	25 36 30, 7	69 50 38, 8
509	221	459	— 21	220	48180	255,6568	82,5	95 27 9, 5	25 36 30, 7	58 56 19, 8
457	193	425	+ 95	168	43680	262,5030	74,6666	60 30 46, 4	21 34 6, 9	97 55 6, 7
457	193	425	— 95	168	27720	262,5030	56,5714	119 29 13, 6	21 34 6, 9	38 56 39, 5
373	277	275	+ 115	252	49140	205,0020	94,5	65 28 13, 6	42 30 3, 6	72 1 42, 8
373	277	275	— 115	252	20160	205,0020	49,7777	114 31 46, 4	42 30 3, 6	22 58 10
533	317	435	+ 75	308	78540	274,2873	115,5	76 18 52	35 18 0, 9	68 23 7, 1

533	317	435	—	75	308	55440	274,2873	91,6363	103°41′ 8″,	35°18′ 0″,9	41° 0′51″,1
601	289	551	+	161	240	85440	361,8521	106,6666	56 8 41, 9	23 32 11, 7	100 19 6, 4
601	289	551	—	161	240	46800	361,8521	73,125	123 51 18, 1	23 32 11, 7	32 36 30, 2
541	421	341	+	29	420	77700	271,1440	116,6666	86 3 0, 4	50 55 36, 1	43 1 23, 5
541	421	341	—	29	420	65520	271,1440	102,8571	96 56 59, 6	50 55 36, 1	35 7 24, 3
565	445	403	+	203	396	119988	317,4558	148,5	62 51 32, 9	44 29 53	72 22 34, 1
565	445	403	—	203	396	39600	317,4558	65,4545	117 8 27, 1	44 29 53	18 21 39, 9
625	505	527	+	377	336	151872	469,6801	149,3333	41 42 32, 1	32 31 13, 5	105 46 14, 4
625	505	527	—	377	336	25200	469,6801	39,375	138 17 27, 9	32 31 13, 5	9 11 18, 6
109	61	91	+	11	60	3060	55,4083	22,5	79 36 40	33 23 54, 6	66 59 25, 4
109	61	91	—	11	60	2400	55,4083	19,2	100 23 20	33 23 54, 6	46 12 45, 4
229	61	221	+	11	60	6960	116,4083	26,6666	79 36 40	15 11 21, 4	85 11 58, 6
229	61	221	—	11	60	6300	116,4083	25,2	100 23 20	15 11 21, 4	64 25 18, 6
229	109	221	+	91	60	9360	208,0084	28,8	33 23 54, 6	15 11 21, 4	131 24 44
229	109	221	—	91	60	3900	208,0084	16,6666	146 36 5, 4	15 11 21, 4	18 12 33, 2
205	85	187	+	13	84	8400	103,7202	34,2857	81 12 9, 3	24 11 22, 3	75 36 28, 4
205	85	187	—	13	84	7308	103,7202	31,5	98 47 50, 7	24 11 22, 3	57 0 47, 0
445	83	437	+	13	84	18900	219,8512	38,6504	81 12 9, 3	10 52 50, 4	87 55 0, 3
445	83	437	—	13	84	17808	219,8512	37,4118	98 47 50, 7	10 52 50, 4	70 19 18, 9
445	205	437	+	187	84	26208	543,0060	41,1429	24 14 22, 3	10 52 50, 4	144 55 47, 3
445	205	437	—	187	84	10500	543,0060	23,3333	155 48 37, 7	10 52 50, 4	13 18 31, 9
241	169	209	+	119	120	19680	169,7042	53,3333	45 14 23	29 51 46	104 3 51
241	169	209	—	119	120	5400	169,7042	21,6	134 45 37	29 51 46	15 22 37
409	169	391	+	119	120	30600	288,0042	56,25	45 14 23	17 3 41, 5	117 41 55, 5
409	169	391	—	119	120	16320	288,0042	38,4	134 45 37	17 3 41, 5	28 10 41, 5
409	241	391	+	209	120	36000	410,7042	57,6	29 51 46	17 3 41, 5	133 4 32, 5
409	241	391	—	209	120	10920	410,7042	26,25	150 8 14	17 3 41, 5	12 48 4, 5

Siebentes Kapitel.

Das Polygon.

173) Es sind gegeben die Verbindungslinien eines Punktes im Innern eines Quadrats mit drei Winkelspitzen, es soll die Quadratseite gefunden werden.

Es seien (Fig. 21.) $OA = a$, $OB - b$, $OC = c$ gegeben, so ist, wenn man

$$OBA = \theta$$

setzt, $OBC = 90 - \theta$, folglich wenn noch $AB = x$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= x^2 + b^2 - 2bx \cos\theta, \\ \text{und } c^2 &= x^2 + b^2 - 2bx \sin\theta, \end{aligned}\right\} (56)$$

$$\text{oder } x^2 + b^2 - a^2 = 2bx \cos\theta \ldots (1)$$

$$\text{und } x^2 + b^2 - c^2 = 2bx \sin\theta \ldots (2).$$

Wird (1) und (2) quadrirt und dann addirt, so erhält man

$$x^4 + 2(b^2 - a^2)x^2 + (b^2 - a^2)^2 + x^4 + 2(b^2 - c^2)x^2 + (b^2 - c^2)^2 = 4b^2x^2,$$

oder $x^4 - (a^2 + c^2)x^2 + \frac{1}{2}(b^2 - a^2)^2 + \frac{1}{2}(b^2 - c^2)^2 = 0.$

Hieraus findet man

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[a^2 + c^2 \pm \sqrt{4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - b^4) - (a^2 + c^2)^2}\right]}.$$

Die Aufgabe ist nur möglich, wenn

$$4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - b^4) > (a^2 + c^2)^2$$

ist. Ist $a = b = c$, so geht der obige Ausdruck über in

$$x = a\sqrt{2},$$

was sich von vorn herein ergiebt, da in diesem Falle O im Durchschnittspunkte der Diagonalen liegt. Der zweite Werth ist $x = 0$.

Ist $a = b$, d. h. liegt O in dem auf AB im Halbirungspunkte errichteten Lothe, so geht obiger Ausdruck über in

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[a^2 + c^2 \pm \sqrt{4a^2c^2 - (a^2 - c^2)^2}\right]}.$$

Ist $a = c$, d. h. liegt O in der Diagonale BD, so geht obiger Ausdruck über in

$$x = \sqrt{a^2 \pm b \sqrt{2\,a^2 - b^2}}.$$

174) Wenn man über den Seiten eines Parallelogramms Quadrate beschreibt und die Mittelpunkte derselben unter einander verbindet, so entsteht ein Quadrat, dessen Inhalt um den 4ten Theil der vorherconstruirten Quadrate größer ist als der Inhalt des Parallelogramms.

Mögen A einer der spitzen Winkel des $\| grs\ ABCD$ (Fig. 22) und a, b, c, d die Mittelpunkte der Seiten desselben sein; man errichte am, bn, cp, dq auf den Seiten und mache diese Lothe bezüglich $= Aa$, Bb, Cc, Ad und ziehe noch Am, Aq, Bm, Bn, qm, nm, dann ist, wenn man $AB = a$, $AD = b$ und $BAD = \alpha$ setzt,

$$Am = \frac{a}{\sqrt{2}},\ Aq = \frac{b}{\sqrt{2}},$$

$$qAm = \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

und $$(qm)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{2\,ab}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{2} + ab \sin \alpha.$$

Es ist ferner

$$ABC = \pi - \alpha,$$

deshalb $$mBn + \frac{\pi}{2} + \pi - \alpha = 2\pi,$$

oder $$mBn = \frac{\pi}{2} + \alpha;$$

und weil

$$Bm = \frac{a}{\sqrt{2}},\ Bn = \frac{b}{\sqrt{2}},$$

so erhält man

$$(mn)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + ab \sin \alpha.$$

Es ist demnach $qm = mn$ etc.

Da ferner $\triangle Amq \cong \triangle Bmn$,

so ist $Amq = Bmn$,

und deshalb $qmn = AmB = \frac{\pi}{2}$;

$qmnp$ ist folglich ein Quadrat.

Nun ist

$$qmnp = (qm)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + ab \sin \alpha$$

$$= ab \sin \alpha + \tfrac{1}{4} (2a^2 + 2b^2)$$

$$= \parallel \mathrm{gr}\, ABCD + \tfrac{1}{4} \cdot \Sigma;$$

wenn Σ die Summe der 4 auf den Seiten construirten Quadrate bezeichnet.

175) Wenn man von den Winkelspitzen eines Sehnenvierecks gerade Linien nach den Diagonalen zieht, welche mit letzteren gleiche Winkel machen, so ist das Rechteck aus zwei von entgegengesetzten Winkelspitzen gezogenen Linien gleich dem Rechtecke aus den beiden übrigen.

Es mögen Aa, Cc (Fig. 23) gleiche Winkel mit BD, und Bb, Dd ebenfalls denselben Winkel (α) mit AC machen, dann ist

$$Aa = \frac{AE \,.\, \sin E}{\sin \alpha},\quad Cc = \frac{CE \,.\, \sin E}{\sin \alpha},$$

$$Bb = \frac{BE \,.\, \sin E}{\sin \alpha},\quad Dd = \frac{DE \,.\, \sin E}{\sin \alpha},$$

folglich $\frac{Aa \,.\, Cc}{Bb \,.\, Dd} = \frac{AE \,.\, CE}{BE \,.\, DE} = 1,$

weil die Figur ein Sehnenviereck ist, mithin ist

$$Aa \,.\, Cc = Bb \,.\, Dd.$$

176) Bilden die Seiten AB, BC, CD, DA eines in einen Kreis eingeschriebenen Vierecks eine geometrische Progression, deren Exponent n ist, so ist

$$\frac{\operatorname{tg} ABC}{\operatorname{tg} BCD} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

Sind a, b, c, d gleich den Seiten AB, BC, CD, DA und $ABC = \theta$, $BCD = \varphi$, dann ist das Viereck

$$= \triangle ABC + \triangle ACD = \tfrac{1}{2} (ab + cd) \sin \theta$$

$$\text{oder auch} = \tfrac{1}{2} (ad + bc) \sin \varphi.$$

$$\text{mithin } (ab + cd) \sin \theta = (ad + bc) \sin \varphi \ldots (\alpha).$$

ferner ist

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2 + d^2 + 2cd \cos \theta,$$

$$\text{oder } - 2(ab + cd) \cos \theta = c^2 + d^2 - (a^2 + b^2)$$

$$\text{und } - 2(ad + bc) \cos \varphi = a^2 + d^2 - (b^2 + c^2),$$

folglich mit Rücksicht auf (α)

$$[c^2 + d^2 - (a^2 + b^2)] \operatorname{tg} \theta = [a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)] \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{d^2 - b^2 - (c^2 - a^2)}{d^2 - b^2 + (c^2 - a^2)} = \frac{(c^2 - a^2)(n^2 - 1)}{(c^2 - a^2)(n^2 + 1)}$$

$$= \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

177) Von einem Paralleltrapez sind gegeben, der Inhalt, die beiden Diagonalen und die Differenz der Quadrate der parallelen Seiten, es sollen die Seiten und Winkel des Trapezes berechnet werden.

Es sei $ABCD$ (Fig. 24) das Paralleltrapez, AB, DC seien dessen parallele Seiten, man ziehe $CE \parallel BD$ bis zur Verlängerung von AB, dann ist

$$\triangle ADC = \triangle BDC = \triangle CBE,$$

$$\text{folglich } ABCD = \triangle ACE.$$

Setzt man nun

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d,$$

$$AC = \alpha,\ BD = CE = \beta,$$

wo α und β gegeben sind, und ist der Inhalt $= m^2$, so hat man

$$ABCD = \triangle\ ACE = \frac{\alpha\beta}{2} \sin ACE = m^2,$$

$$\text{ferner } AE^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos ACE$$

$$\text{oder } (a + c)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4m^4},$$

$$\text{oder } a + c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4m^4}}.$$

Da nun $a^2 - c^2 = n^2$ gegeben ist, so läßt sich aus den beiden letzten Gleichungen a und c bestimmen. Da ferner die drei Seiten des Dreiecks ACE bekannt sind, so lassen sich auch die Winkel CAE und CEA berechnen. Hierdurch sind nun auch für das Dreieck CAB drei Stücke gewonnen, nämlich AB, AC und CAB, folglich lassen sich CB und CBA bestimmen, ferner sind im Dreieck ABD die Stücke AB, BD und $ABD = AEC$ bekannt, woraus endlich noch DA und DAB bestimmt werden können.

178) Die Fläche (F) eines regulären Fünfecks verhält sich zur Fläche $(\triangle)$ des gleichschenkligen Dreiecks, welches eine Seite des Fünfecks zur Grundlinie und die gegenüberliegende Winkelspitze zur Spitze hat, wie $\sqrt{5} : 1$.

Ist $ABCDE$ (Fig. 25.) das reguläre Fünfeck und ABC das in Rede stehende Dreieck, so sind die Winkel

$$CAD = 36^0$$
$$\text{und } ADC = 72^0.$$

Bezeichnet nun r den Radius des umschriebenen Kreises, so ist

$$AC = 2\ r \sin 72^0 = 2\ r \cos 18^0,$$

$$\text{und } \triangle\ CAD = \triangle = \tfrac{1}{2}\ AC^2.\ \sin CAD$$

$$\text{oder } \triangle = 2\ r^2 \cos^2 18.\ \sin 36.$$

Nun ist die Fläche des Fünfecks

$$F = 5.\ \frac{r^2}{2} \sin 72 = \frac{5r^2}{2} \cos 18;$$

$$\text{folglich } F : \triangle = \frac{5r^2}{2}.\ \cos 18\ :\ 2\ r^2 \cos^2 18.\ \sin 36$$

oder $F : \triangle = 5 : 4 \cos 18.\ \sin 36.$

Es ist nun $\sin 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$

und hieraus $\cos^2 18^0 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$,

demnach $4 \cos 18 \sin 36 = 8 \sin 18 \cos^2 18$

$$= 8.\ \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.\ \frac{\sqrt{5} + 5}{8}$$

$$= \sqrt{5}.$$

Setzt man diesen Werth in die obige Proportion, so erhält man

$$F : \triangle = 5 : \sqrt{5}.$$
$$= \sqrt{5} : 1.$$

179) Wenn man die Endpunkte einer Seite eines regulären Polygons mit den Endpunkten irgend einer andern so verbindet, daß sich die Verbindungslinien kreuzen, so ist der geometrische Ort des Kreuzungspunktes ein Kreis. Wie groß ist der Radius dieses Kreises?

Es sei $ABCDEF$ (Fig. 26.) das reguläre Polygon, AB eine seiner Seiten, CD eine beliebige andere, man ziehe AC, BD, die sich in O schneiden mögen; es wird behauptet, daß der Ort von O ein Kreis sei. Es ist der Winkel

$$AOB = ADB + CAD = 2.\ ADB$$
$$= \frac{2\pi}{n}.$$

Der Punkt O liegt demnach in einem Kreissegmente, dessen Sehne AB, und dessen Peripheriewinkel $\frac{2\pi}{n}$ ist.

Bezeichnet r den Radius dieses Kreises, so ist $AB = 2\, r \sin \frac{2\pi}{n}$,

$$r = \frac{AB}{2 \sin \frac{2\pi}{n}},$$

mithin, wenn $AB = a$ gesetzt wird.

$$r = \tfrac{1}{2}\, a \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{n}.$$

Zusatz. Beim regulären Zwölfeck ist der Radius gleich der Polygonseite.

Es ist nämlich

$$r = \tfrac{1}{2}.\ a \operatorname{cosec} 30^0$$
$$= \tfrac{1}{2}\ a.\ 2\ (16)$$
$$= a.$$

180) Wenn in einem regulären Polygon von n Seiten, dessen größerer Radius r ist, ein Punkt angenommen wird, dessen Abstand vom Centrum des Polygons $= a$ ist, wenn ferner von diesem Punkte Lothe auf die Polygonseiten gefällt und deren Fußpunkte verbunden werden, so ist die Summe der Quadrate der letzteren Verbindungslinien

$$\Sigma = n \sin^2 \frac{2\pi}{n}\ (r^2 + a^2).$$

Seien $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A^n$ (Fig. 27.) das Polygon, C dessen Centrum, O der gegebene Punkt, Oa_1, Oa_2, Oa_3 etc. die von ihm auf die Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, etc. gefällten Lothe und werden

$$OAC = \theta \text{ und } A_1\ CA_2 = \frac{2\pi}{n} = 2\alpha$$

gesetzt, so ist $A_1\ A_2\ A_3 = \pi - 2\ \alpha$.

Nun läßt sich um $Oa_1\ A_2\ a_3$ ein Kreis beschreiben, dessen Durchmesser OA_2 ist, folglich ist

$$a_1\ a_2 = OA_2 \sin 2\alpha$$

entsprechend $a_2\ a_3 = OA_3 \sin 2\,\alpha$, etc.

folglich $(a_1\ a_2)^2 + (a_2\ a_3)^2 + (a_3\ a_4)^2 + \ldots + (a_n\ a_1)^2$

$$= \sin^2 2\alpha\ (OA_2{}^2 + OA_3{}^2 + \ldots + OA_n{}^2 + OA_1{}^2)$$
$$= \sin^2 2\alpha\ (OA_2{}^2 + OA_{n-1}{}^2 + \ldots + OA_2{}^2)$$
$$= \sin^2 2\alpha\ \{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)$$
$$+ [r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta + 2\alpha)]$$
$$+ \ldots$$
$$+ [r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta + 2\,(n-1)\,\alpha)]\}$$

$$= n \sin^2 2\alpha\,(r^2 + a^2) - 2ar \sin^2 2\alpha\,[\cos\theta + \cos(\theta + 2\alpha) + \cos(\theta + 4\alpha) + \ldots \cos(\theta + 2(n-1)\alpha)]$$

$$= n \sin^2 2\alpha\,(r^2 + a^2)$$

$$- 2ar \sin^2 2\alpha \,.\left[\frac{\sin[\theta + (2n-1)\alpha] - \sin(\theta - \alpha)}{2\sin\alpha}\right]$$

$$= n \sin^2 \frac{2\pi}{n}(r^2 + a^2), \text{ da } 2\alpha = \frac{2\pi}{n} \text{ ist.}$$

Zusatz. Ist r der größere Radius eines regulären $n$ecks, so ist die Summe der Quadrate der Seiten desjenigen regulären $n$ecks, welches sich in den mit den kleineren Radius beschriebenen Kreis construiren läßt

$$\Sigma = nr^2 \sin^2 \frac{2\pi}{n}.$$

181) Wenn von einer Winkelspitze eines regulären Polygons von n Seiten nach allen übrigen Winkelspitzen gerade Linie gezogen werden, so ist ihre Summe

$$\Sigma = a \operatorname{cosec}^2 \frac{90}{n},$$

wenn $2a$ die Länge einer Polygonseite ist.

Ist $ABCDEF$ (Fig. 26) das reguläre Polygon von n Seiten, so sind die auf den Sehnen AB, AC, AD etc. stehenden Centriwinkel bezüglich:

$$\frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \frac{6\pi}{n},\ \text{etc.},$$

mithin, wenn r der Radius des umschriebenen Kreises ist,

$$AB = 2r \sin \frac{\pi}{2},$$

$$AC = 2r \sin \frac{2\pi}{n},$$

$$AD = 2r \sin \frac{3\pi}{n}, \text{ etc.}$$

und also

$$\Sigma = 2r\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right] \ldots (A).$$

Setzt man die Klammer $= S$ und multiplicirt beide Seiten der Gleichung

$$S = \sin\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

mit $2\cos\frac{\pi}{n}$; so erhält man

$$\left.\begin{aligned} 2S\cos\frac{\pi}{n} &= \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{n} \\ &+ \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-2)\pi}{n} \end{aligned}\right\} (23)$$

$$= S - \frac{\pi}{n} + \sin\frac{n\pi}{n} + S - \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$= 2S - 2\sin\frac{\pi}{n},$$

mithin $S\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) = \sin\frac{\pi}{n}$,

$$\text{oder } S = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}} \ldots (B).$$

Setzt man (B) in (A) ein, so erhält man

$$\Sigma = 2rS$$

$$= \frac{2r\sin\frac{\pi}{n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \frac{AB}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}} = \frac{2a}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}$$

$$= a\operatorname{cosec}^2\frac{90}{n}.$$

Achtes Kapitel.

Der Kreis.

182) An die beiden Seiten eines Kreisdurchmessers AC sind die Winkel α und β angetragen, das Sehnenviereck $ABCD$ ist ergänzt und AD, BC sind bis zum Durchschnitte in F verlängert worden, es soll mit Hülfe dieser Figur der Satz:

$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

nachgewiesen werden.

Es ist (Fig. 28)

$$\frac{FC}{DC} = \sec DCF = \sec FAB = \frac{FA}{AB},$$

$$\text{oder } \frac{FC}{AB} = \frac{FA\,.\,DC}{AB^2} = \frac{DC}{DA} \cdot \frac{FA\,.\,AD}{AB^2}$$

$$= \frac{DC}{DA}\left(\frac{FA^2 - FA\,.\,FD}{AB^2}\right)$$

$$= \frac{DC}{DA}\left(\frac{AB^2 + FB^2 - FB\,.\,FC}{AB^2}\right)$$

$$= \frac{DC}{DA}\left(\frac{AB^2 + FB\,.\,BC}{AB^2}\right)$$

oder

$$\frac{FB}{AB} - \frac{CB}{AB} = \frac{DC}{DA}\left(1 + \frac{FB}{AB} \cdot \frac{BC}{AB}\right);$$

mithin ist

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\,[1 + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}\alpha]$$

woraus man erhält:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

183) Es seien AB, AC Bögen bezüglich von 60^0 und 90^0 in einem Kreise, dessen Mittelpunkt O ist; zieht man AB, OC und verlängert beide bis zum Durchschnitte in D, dann hat der Bogen, dessen Sehne $= DC$ ist, einen Cosinus, welcher der Sehne gleich ist.

Setzt man (Fig. 29) den Radius $OC = r$ dann ist, weil $AOB = 60^0$, auch $OAB = 60^0$ und folglich $ADO = 80^0$, mithin

$$OD = r \cot 30^0$$
$$= r\sqrt{3}$$
$$\text{und } DC = r(\sqrt{3} - 1) \ldots (A).$$

Es sei nun AP der Bogen, dessen Sehne $= DC$ ist, und θ sei der Centriwinkel zu AP, so ist wegen (A)

$$DC = 2r \sin\frac{\theta}{2} = r(\sqrt{3} - 1),$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \ldots (B),$$

$$\text{und } \cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 1 \ldots (C).$$

Aus (B) und (C) folgt

$$2\sin\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

mithin für $r = 1$

$$CD\ (= \text{chorde}\ \theta) = \cos\theta.$$

184) Wenn man in ein Kreissegment, dessen Bogen $= l$ und dessen Radius $= r$ ist einen Kreis beschreibt, welcher den Bogen in dessen Mittelpunkte berührt und außerdem einen zweiten Kreis beschreibt, welcher den vorigen Kreis, sowie den Bogen und die Sehne des Segments berührt, so ist der Radius des letzeren

$$\varrho = \frac{r}{4}\sin^2\frac{l}{2r}.$$

Sei A (Fig. 30) der Mittelpunkt des Bogens vom Segment EAD, O das Centrum des zugehörigen Kreises, C Centrum des ersten und P Centrum des zweiten Berührungskreises, man ziehe OP, CP, OA, welche letzter Linie offenbar durch C und den Mittelpunkt (A) von arc ED gehen wird, so ist, wenn $COP = \theta$ gesetzt wird,

$$(r - \varrho) \cos\theta = \varrho + (r - a),$$

$$CP = \frac{a}{2} + \varrho,$$

$$OC = r - \frac{a}{2},$$

$$OP = r - \varrho,$$

folglich $\left(\frac{a}{2} + \varrho\right)^2 = \left(r - \frac{a}{2}\right)^2 + (r - \varrho)^2$

$$- 2\left(r - \frac{a}{2}\right)(r - \varrho) \cos\theta$$

$$= \left(r - \frac{a}{2}\right)^2 + (r - \varrho)^2$$

$$- (2r - a)(\varrho + r - a),$$

mithin $4\, r\varrho = 2\, ar - a^2 = a\,(2\,r - a) = BD^2$

$$= r^2 \sin^2 \frac{l}{2r},$$

und also $\varrho = \frac{r}{4} \sin^2 \frac{l}{2r}$.

185) Zwei Kreise haben einen gemeinschaftlichen Radius, ein dritter Kreis berührt die vorigen und ihren gemeinschaftlichen Radius, ein vierter endlich berührt die drei vorigen Kreise. Bezeichnet r den ersterwähnten gemeinschaftlichen Radius, so ist der Radius des vierten Kreises $= \frac{3r}{56}$.

Es sei AB (Fig. 31) der gemeinschaftliche Radius der zwei Kreise BC, AC, deren Mittelpunkte bezüglich A und B sind, O sei das Centrum des Kreises, welcher AB und die vorigen Kreise berührt, man ziehe AO und verlängere diese Linie bis zum Durchschnitte mit dem Kreise COB in P, ziehe $OM \perp AB$ und setze $OM = \varrho$, so ist

$$AO = r - \varrho \text{ und } AM = \frac{r}{2},$$

$$\text{folglich } (r - \varrho)^2 = \varrho^2 + \frac{r^2}{4}$$

$$\text{oder } r^2 - 2r\varrho = \frac{r^2}{4},$$

$$\varrho = \frac{3r}{8}.$$

Ist ferner O' das Centrum des vierten Kreises, welcher die drei früheren berührt und ϱ' dessen Radius, so ist

$$AO' = r - \varrho',\ MO' = 2\varrho + \varrho',\ AM = \frac{r}{2},$$

$$\text{folglich } (r - \varrho')^2 = (2\varrho + \varrho')^2 + \frac{r^2}{4}$$

$$\text{oder } r^2 - 2r\varrho' = 4\varrho^2 + 4\varrho\varrho' + \frac{r^2}{4},$$

$$(2r + 4\varrho)\,\varrho' = \frac{3r^2}{4} - 4\varrho^2,$$

$$\text{und weil } \varrho = \frac{3r}{8},$$

$$\left(2r + \frac{3r}{2}\right)\varrho' = \frac{3r^2}{4} - \frac{9r^2}{16} = \frac{3r^2}{16},$$

$$\varrho' = \frac{3r}{56}.$$

186) Wenn man in ein Quadrat einen Kreis, zwischen die 4 Winkelräume wieder Kreise, in die jetzt noch bleibenden Winkelräume wieder Kreise u. s. f. beschreibt, so ist die Summe sämmtlicher Kreise

$$\Sigma = \frac{a^2\pi}{4} \cdot \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

wenn a die Seite des Quadrats bezeichnet.

Es seien O (Fig. 32) der Mittelpunkt und r der Radius des ersten Kreises, O' der Mittelpunkt und r' der Radius des nächsten Kreises im Winkelraume bei A, welcher den ersteren in P berührt.

Man fälle OM, $O'M'$ auf die Quadratseite AB, dann ist $OM = AM$, $O'M' = AM'$ und deshalb $AO'O$ eine gerade Linie, welche durch P geht. Nun ist

$$AO = r\sqrt{2} = OP + PO' + O'A$$
$$= r + r' + r'\sqrt{2},$$

$$\text{mithin } r' = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \cdot r = (3 - 2\sqrt{2})\, r \ldots (1).$$

Bezeichnen r'', r''', r^{IV} etc. die Radien der übrigen Kreise, so ist

$$r'' = (3 - 2\sqrt{2})\, r' \ldots (2)$$
$$r''' = (3 - 2\sqrt{2})\, r'' \ldots (3) \text{ etc.},$$

mithin erhält man für die Summe aller Kreisflächen

$$r^2\pi + (r'^2\pi + r''^2\pi + r'''^2\pi + etc.)\, 4$$

$$= 4r^2\pi\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \left(\frac{r''}{r}\right)^2 + \left(\frac{r'''}{r}\right)^2 + etc.\right] + 3r^2\pi \ldots (4).$$

Setzt man der Kürze wegen

$$3 - 2\sqrt{2} = e,$$

$$\text{so ist } r' = e\,r, \quad \frac{r'}{r} = e,$$

$$r'' = e^2 r, \quad \frac{r''}{r} = e^2,$$

$$r''' = e^3 r, \text{ etc.}, \frac{r'''}{r} = e^3, \text{ etc.},$$

Der Ausdruck unter (4) ist demnach

$$\Sigma = 4r^2\pi\,[1 + e^2 + e^4 + e^6 + etc.] - 3r^2\pi$$

$$= \frac{4r^2\pi}{1 - e^2} - 3r^2\pi$$

$$= \frac{4r^2\pi}{1 - (17 - 12\sqrt{2})} - 3r^2\pi$$

$$= \frac{r^2\pi}{3\sqrt{2} - 4} - 3r^2\pi$$

$$= r^2\pi.\left(\frac{4 + 3\sqrt{2}}{2} - 3\right)$$

$$= r^2 \pi . \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$$

$$= r^2 \pi . \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

und weil $r = \frac{1}{2} a$,

$$\Sigma = \frac{a^2 \pi}{4} . \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} .$$

187) Wenn man über den Radien, welche einen Quadrant einschließen Halbkreise beschreibt, so findet, wenn r den Radius des Quadranten und ϱ den Radius des Kreises bezeichnet, welcher alle drei Kreisbögen berührt, folgende Beziehung statt:

$$\varrho : r = \sqrt{2} - 1 : 3\sqrt{2} - 1.$$

Ist C (Fig 33) der Mittelpunkt und sind CA, CB die einschließenden Radien des Quadranten, D der Mittelpunkt von CA, und E der Mittelpunkt des Berührungskreises, so ist

$$AC = r,\ CE = r - \varrho,\ CD = \frac{r}{2},\ DE = \frac{r}{2} + \varrho$$

und $ECD = \frac{\pi}{4}$, folglich in $\triangle\ ECD$

$$ED^2 = EC^2 + CD^2 - 2\,EC\,.\,CD\,.\cos ECD$$

oder $\left(\frac{r}{2} + \varrho\right)^2 = (r - \varrho)^2 + \frac{r^2}{4} - \frac{r}{\sqrt{2}}(r - \varrho)$,

oder $\frac{r^2}{4} + r\varrho + \varrho^2 = r^2 - 2r\varrho + \varrho^2 = \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{\sqrt{2}} + \frac{r\varrho}{\sqrt{2}}$,

oder $\left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r\varrho = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r^2$,

mithin $\frac{\varrho}{r} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3\sqrt{2} - 1}$.

188) Eine vertikale Stange trägt einen Kreisring, welcher gerade in der Vertikalebene der Sonne liegt, die Grenze des Schattens vom Ringe befindet sich in einer Entfernung vom Fuße der Stange, welche

der Stange gleich ist; welches ist die Höhe der Sonne, wenn die Stange achtmal so groß als der Radius des Ringes ist?

Es sei AB (Fig. 34) die Stange, C der Mittelpunkt des Ringes in der Verlängerung von AB, D die Grenze des Schattens, so wird die Tangente DE die Gesichtslinie nach der Sonne von D aus sein. Zieht man noch den Radius $CE = r$, sowie CD und AD, so ist $AB = AD = 8r$

$$\text{und } AC = 9r,$$

$$\text{folglich } CD^2 = AC^2 + AD^2 = 81r^2 + 64r^2$$
$$= 145r^2,$$
$$\text{und } ED^2 = CD^2 - CE^2 = 144r^2$$
$$\text{folglich } ED = 12r.$$

Nun ist

$$\text{tg } ADC = \frac{9}{8}$$

$$\text{und tg } CDE = \frac{CE}{ED} = \frac{1}{12},$$

$$\text{folglich tg } ADE = \frac{\frac{9}{8} + \frac{1}{12}}{1 - \frac{9}{96}} = \frac{4}{3},$$

$$\text{und deßhalb } ADE = \text{arc tg } \frac{4}{3}.$$

189) Ein Kreis bewegt sich auf der Peripherie eines andern Kreises um einen Punkt O und ist von einem anderen Punkte P beobachtet worden zur Zeit, wo er unter den größten und kleinsten Winkeln, 2α und 2β bezüglich gesehen wurde; es wird behauptet, daß der Abstand des Punktes O vom Centrum des beweglichen Kreises $= PO. \sin\varphi$ sei, wo φ durch die Gleichung

$tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ gefunden wird.

Ist C (Fig. 35.) das Centrum des beweglichen Kreises zur Zeit, wo er gerade zwischen O und P steht, so wird er unter dem größten Gesichtswinkel 2α gesehen werden. Wird nun der Radius des beweglichen Kreises $= r$ und $CO = x$ gesetzt, so ist

$$PC \sin\alpha = r \text{ oder } (PO - x)\sin\alpha = r \ldots (1).$$

ferner wenn das Centrum C' des beweglichen Kreises auf der Verlängerung von PO liegt, so ist

$$PC' \sin\beta = r \text{ oder } (PO + x)\sin\beta = r \ldots (2).$$

Aus (1) und (2) folgt deshalb

$$(PO - x)\sin\alpha = (PO + x)\sin\beta,$$

$$\text{mithin } x = PO.\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}.$$

$$= PO.\sin\varphi;$$

$$\text{wo } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

190) Ueber die Peripherieen zweier Räder, deren Centralabstand $= a$ ist und von welchen die Summe der Radien $= c$ ist, ist eine Schnur so gespannt, daß sie sich zwischen den Rädern kreuzt. Es ist zu zeigen, daß die Länge der Schnur

$$= 2\left\{\sqrt{a^2 - c^2} + c \text{ arc cos}\left(-\frac{c}{a}\right)\right\} \text{ ist.}$$

Sind A, B (Fig. 36) die Mittelpunkte der Räder, deren Radien wir mit r, r' bezüglich bezeichnen wollen, CD, $C'D'$ die gemeinschaftlichen Tangenten, welche sich in E schneiden mögen, so ist, wenn man AC, BD zieht,

$$\sin AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BE}$$

$$= \frac{AC + BD}{AE + BE}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$= \cos CAE = \cos EBD \ldots (A)$$

Nun ist

$$CD\ (= FB) = \sqrt{a^2 - c^2}\ \ldots\ (B),$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ferner ist arc } CC' = 2r \text{ arc cos } \frac{c}{a} \\ \text{arc } DD' = 2r' \text{ arc cos } \frac{c}{a} \end{array}\right\} \text{ wegen } (A)$$

folglich

$$\text{arc } CGC' = 2r\left(\pi - \text{arc cos } \frac{c}{a}\right) = 2r \text{ arc cos } \left(-\frac{c}{a}\right),$$

und

$$\text{arc } DHD' = 2r'\left(\pi - \text{arc cos } \frac{c}{a}\right) = 2r' \text{ arc cos } \left(-\frac{c}{a}\right),$$

und deren Summe

$$= 2\,(r + r') \text{ arc cos } \left(-\frac{c}{a}\right).$$

Dazu $CD + C'D' = 2\sqrt{a^2 - c^2}$ wegen (B); folglich ist die ganze Schnur

$$= 2\sqrt{a^2 - c^2} + 2c \text{ arc cos } \left(-\frac{c}{a}\right).$$

191) Wenn C der Mittelpunkt eines Halbkreisbogens und AB dessen Durchmesser ist und es wird der Winkel ACB in $n + 1$ gleiche Theile getheilt durch Linien, welche vom Durchmesser begrenzt werden, so ist die Summe der Quadrate der reciproken Werthe dieser Linien

$$= \frac{1}{2r^2}\left\{n + \cot \frac{\pi}{2\,(n+1)}\right\},$$

wo r den Radius des Kreises bezeichnet.

Sind CP_1, CP_2, ... CP_n (Fig. 37) die theilenden Linien und setzt man $ACP_1 = \theta$, $ACP_2 = 2\theta$, *etc.*, so ist

$$AC = r\sqrt{2},\ CAB = \frac{\pi}{4},$$

folglich $CP_1 = r\sqrt{2} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$

$$= \frac{r\sqrt{2}}{\cos\theta + \sin\theta},$$

mithin $\frac{1}{CP_1{}^2} = \frac{1}{2r^2}(1 + \sin 2\theta)$,

entsprechend

$$\frac{1}{CP_2{}^2} = \frac{1}{2r^2}(1 + \sin 4\theta)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1}{CP_n} = \frac{1}{2r^2}(1 + \sin 2n\theta),$$

folglich

$$\Sigma = \frac{1}{2r^2}(n + \sin 2\theta + \sin 4\theta + \ldots + \sin 2n\theta.$$

Setzt man

$$S = \sin 2\theta + \sin 4\theta + \ldots + \sin 2n\theta,$$

so erhält man (27) u. (23)

$$2S\cos 2\theta = \sin 4\theta + \sin 6\theta + \ldots + \sin(2n+2)\theta$$
$$+ \sin 2\theta + \ldots + \sin(2n-2)\theta$$
$$= S - \sin 2\theta + \sin(2n+2)\theta + S - \sin 2n\theta,$$

$$2S(1 - \cos 2\theta) = \sin 2\theta - \left\{\sin(2n+2)\theta - \sin 2n\theta\right\}$$

$= 2\sin\theta\,[\cos\theta - \cos(2n+1)\theta]$ (27) u. (36)

$$S = \frac{\cos\theta - \cos(2n+1)\theta}{2\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta - \cos(\pi - \theta)}{2\sin\theta}$$

$$= \cot\theta,$$

und daher

$$\Sigma = \frac{1}{2r^2}(n + \cot\theta)$$

$$= \frac{1}{2r^2}\left[n + \cot\frac{\pi}{2(n+1)}\right].$$

192) Wenn man die Peripherie des innern von zwei concentrischen Kreisen, deren Radien R und r sind in n gleiche Theile theilt und die sämmtlichen Theilpunkte mit irgend einem Punkte der Peripherie des äußeren Kreises verbindet, so ist Summe der Quadrate aller dieser Verbindungslinien $= n(R^2 + r^2)$.

Es seien C (Fig. 38) das gemeinschaftliche Centrum beider Kreise, A der gegebene Punkt im äußeren, P_1, P_2, P_3, *etc.* die Theilungspunkte im inneren Kreise, so ist

$$P_1CP_2 = P_2CP_3 = P_3CP_4 \text{ etc.} = \frac{2\pi}{n} = \alpha,$$

möge nun

$$ACP_1 = \beta \text{ sein, so ist}$$

$$ACP_2 = \beta + \alpha,\ ACP_3 = \beta + 2\alpha, \text{ etc.};$$

und $AP_1^2 = R^2 + r^2 + 2Rr\cos\beta$

$$AP_2^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\beta + \alpha)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$AP_n^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos[\beta + (n-1)\alpha],$$

folglich $AP_1^2 + AP_2^2 + AP_3^2 + \ldots + AP_n^2 = n(R^2 + r^2)$

$$- 2Rr\{\cos\beta + \cos(\beta+\alpha) + \cos(\beta + 2\alpha) + \ldots$$

$$+ \cos[\beta + (n-1)\alpha]\}$$

$$= n(R^2 + r^2) - 2Rr\,.\,S.$$

Multiplicirt man den Werth von S mit $2\cos\alpha$, so erhält man

$$2S\cos\alpha = \cos(\beta+\alpha) + \cos(\beta + 2\alpha) + \ldots + \cos(\beta + n\alpha)$$

$$+ \cos(\beta - \alpha) + \cos\beta + \ldots + \cos[\beta + (n-2)\alpha]$$

$$= S - \cos\beta + \cos(\beta + n\alpha)$$

$$+ S + \cos(\beta - \alpha) - \cos(\beta + (n-1)\alpha].$$

Nun ist

$$-\cos\beta + \cos(\beta - n\alpha) = -2\sin\frac{2\beta + n\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}$$

und $\cos(\beta - \alpha) - \cos[\beta + (n-1)\alpha] = +2\sin\frac{2\beta + n\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}$,

folglich geht die obige Gleichung über in

$$2S\cos\alpha = 2S.$$

Da nun $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ ist, so kann $\cos\alpha$ nicht $= 1$ sein, es muß deshalb $S = 0$ sein.

Hieraus folgt aber

$$AP_1^{\,2} + AP_2^{\,2} + \ldots + AP_n^{\,2} = n(R^2 + r^2).$$

193) Von dem einen Endpunkte A des Durchmessers AB eines Halbkreises, dessen Centrum C ist, ist eine Linie AP so gezogen, daß sie die Halbkreisfläche halbirt; es wird behauptet, daß, wenn θ das in Theilen des Radius $= 1$ ausgedrückte Complement von PCB bezeichnet, $\theta = \cos\theta$ ist.

Es ist (Fig. 39.)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - PCB$$

oder $PCB = \frac{\pi}{2} - \theta$,

folglich $ACP = \frac{\pi}{2} + \theta$

und wenn r den Radius bezeichnet,

$$\text{Sector } ACP = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \text{Segm. } AP + \triangle\, ACP$$

$$= \frac{r^2\pi}{4} + \triangle\, ACP,$$

mithin ist $\frac{r^2\theta}{2} = \triangle\, ACP = \frac{r^2}{2}\sin ACP = \frac{r^2}{2}\cos\theta$,

oder $\theta = \cos\theta$.

Um einen angenäherten Werth von θ zu erhalten, hat man

$$\theta = 1 - \frac{\theta^2}{1.2} = \frac{\theta^4}{1.2.3\,4} = etc. \quad (65)$$

und für die erste Annäherung

$$\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\theta^2 + 2\theta - 2 = 0,$$

$$\theta = \sqrt{3} - 1 = 0,\ 7325,$$

in Graden ausgedrückt

$$\theta = \frac{0{,}7325.\ 180}{\pi}$$

$$= 41,\ 96.$$

$$\theta = 42^0 \text{ circa.}$$

194) Bezeichnen A und B bezüglich die Flächen das in einen Kreis und des um denselben beschriebenen regulären Polygons von n Seiten, ebenso a und b die Flächen der entsprechenden Polygone von $2n$ Seiten, so ist der Quotient

$$\frac{A - B}{a - b}$$

stets größer als 4, und nähert sich bei wachsendem n dieser Zahl als seiner Grenze.

Bezeichnet r den Radius des Kreises, so ist

$$A = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\text{und } B = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

$$\text{folglich } B - A = nr^2 \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right\}$$

$$= \frac{nr^2 \sin^3 \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}},$$

und analog

$$b - a = \frac{2\,nr^2 \sin^3 \frac{\pi}{2\,n}}{\cos \frac{\pi}{2\,n}},$$

folglich $\frac{B - A}{b - a} = \frac{\sin \frac{3\,\pi}{n} \cos \frac{\pi}{2\,n}}{2 \sin^3 \frac{\pi}{2\,n} \cos \frac{\pi}{n}}$

$$= \frac{4 \cos^4 \frac{\pi}{2\,n}}{\cos \frac{\pi}{n}}$$

$$= 4 \left\{ \frac{\cos^4 \frac{\pi}{2\,n} - \sin^4 \frac{\pi}{2\,n} + \sin^4 \frac{\pi}{2\,n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2\,n} - \sin^2 \frac{\pi}{2\,n}} \right\}$$

$$= 4. \left\{ 1 + \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2\,n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right\}.$$

Dieser Ausdruck ist stets > 4, da $\sin \frac{\pi}{2\,n}$ und $\cos \frac{\pi}{n}$ stets positive Werthe haben. Wächst n, so nähert sich $\frac{\pi}{2\,n}$ und also auf $\sin \frac{\pi}{2\,n}$ der Null und $\cos \frac{\pi}{n}$ der Einheit, mithin der Quotient $\frac{B - A}{b - a}$ der 4.

Neuntes Kapitel.

Angewandte Trigonometrie.

195) Es seien A, B, C drei Orte auf der Erdoberfläche, von B sei in der Richtung BA eine Basis $BD = a$ abgemessen, außerdem mögen gemessen sein die Winkel $CDB = \alpha$, $DBC = \beta$ und $ACB = \gamma$, ferner die Depression (δ) von A unter C und die Elevation (ε) von B in Bezug auf den Punkt C. Welches sind die Entfernungen der drei Punkte und die Höhen von C und B über dem Horizonte von A?

Es ist (Fig. 16) im $\triangle\ BCD$

$$BC = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \ldots (1),$$

$$AC = \frac{BC . \sin \beta}{\sin (\beta + \gamma)}$$

$$= \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta) \sin (\beta + \gamma)} \ldots (2),$$

$$AB = \frac{BC . \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$

$$= \frac{a \sin \alpha \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta) \sin (\beta + \gamma)} \ldots (3).$$

Es ist ferner die Höhe von C über A

$$h = AC \sin \delta, \text{ oder wegen (2)}$$

$$= \frac{a \sin \alpha \sin \beta \sin \delta}{\sin (\alpha + \beta) \sin (\beta + \gamma)},$$

und die Höhe von B über C

$$h' = BC \sin \varepsilon, \text{ oder wegen (1)}$$

$$= \frac{a \sin \alpha \sin \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta)},$$

mithin ist die Höhe von B über dem Horizonte von A

$$h + h' = \frac{a \sin \alpha \sin \beta \sin \delta}{\sin (\alpha + \beta) \sin (\beta + \gamma)} + \frac{a \sin \alpha \sin \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

196) A, B, C seien drei unzugängliche Punkte, hingegen seien D auf der Verlängerung von AB und E auf der Verlängerung von AC zugänglich und außerdem $DE = a$, $BDE = \alpha$, $CDE = \beta$, $DEB = \gamma$, $DEC = \delta$ gemessen; welches sind die gegenseitigen Entfernungen der Punkte A, B und C?

Es ist (Fig. 40)

$$DC = \frac{a \sin \delta}{\sin (\beta + \delta)}$$

und

$$AC = \frac{DC \sin ADC}{\sin DAC}$$

$$= \frac{a \sin \delta \sin (\alpha - \beta)}{\sin (\beta + \delta) \sin (\alpha + \delta)},$$

ferner

$$BE = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\alpha + \gamma)}$$

und

$$AB = \frac{BE \,.\, \sin AEB}{\sin EAB}$$

$$= \frac{a \sin \alpha \sin (\delta - \gamma)}{\sin (\alpha + \gamma) \sin (\alpha + \delta)}.$$

Da nun im $\triangle ABC$ außer AB und AC noch der Winkel

$$BAC = \pi - (\alpha + \delta)$$

bekommt, so läßt sich auch BC leicht bestimmen.

197) Es sind die Winkel gemessen, welche die Gesichtslinien von den Endpunkten einer abgesteckten Basis nach einem erhabenen Gegenstande mit der Basis machen, ferner der Elevationswinkel des Gegenstandes, es wird die Höhe des letzteren über dem Horizont und dessen Azimuth für den durch die Basis gehenden Verticalkreis gesucht.

Ist C (Fig. 41) der erhabene Gegenstand, AB die Basis, CO die Höhe des Gegenstandes, so ist gemessen

$$CAB = \alpha,\ CBA = \beta$$

und die Elevation

$$CAO = \varepsilon,$$

und deshalb

$$AC = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\text{und } CO = h = AC \sin\varepsilon$$

$$= \frac{a \sin\beta \sin\varepsilon}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Zieht man noch $CD \perp AB$ und verbindet O mit D, so ist $OD \perp AB$ und folglich

$$AD = AC \cos\alpha,$$

$$AO = AC \cos\varepsilon,$$

$$\cos BAO = \frac{AD}{AO} = \frac{\cos\alpha}{\cos\varepsilon},$$

wodurch das fragliche Azimuth bestimmt ist.

198) Die Schatten zweier Mauern, welche auf einander senkrecht stehen und bezüglich a und a' Fuß hoch sind, werden beobachtet zur Zeit, wo die Sonne genau im Süden steht und bezüglich b und b' Fuß breit gefunden. Wenn α die Höhe der Sonne und β die Neigung der ersten Mauer gegen den Meridian bezeichnet, wie groß sind α und β?

Es sei AB (Fig. 42.) die Durchschnittslinie beider Mauern, AD und AD' bezüglich deren Richtungen, $AB = a$, $AB' = a'$ deren Höhen, C der Schatten des Punktes B und C' der Schatten des Punktes B', so sind, wenn man $CD \perp AD$ und $C'D' \perp AD'$ zieht, $CD = b$ und $C'D' = b'$ die Schattenbreiten. Zieht man AC, BC, $B'C'$, so ist AC der Meridian, $BCA = B'C'A = \alpha$ die Sonnenhöhe, $CAD = \beta$ die Neigung der ersten Mauer gegen den Meridian, und $C'AD' = 90 - \beta$ die Neigung der zweiten Mauer gegen den Meridian. Man hat nun

$$AC = a \cot\alpha, \quad CD = b = a \cot\alpha \sin\beta,$$

$$AC' = a' \cot\alpha, \quad C'D' = b' = a' \cot\alpha \cos\beta,$$

$$\text{folglich } \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b'}{a'}\right)^2 = (\cot\alpha)^2$$

$$\text{oder } \cot\alpha = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b'}{a'}\right)^2}.$$

Dividirt man den Werth von b' durch den von b, so erhält man

$$\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}\cot\beta,$$

$$\text{oder } \cot\beta = \frac{ab'}{a'b}.$$

199) Um die Länge einer unzugänglichen Mauer zu finden, stellt sich Jemand gerade südlich von dem einen Ende und dann gerade westlich von dem anderen und zwar beidemal so, daß ihm die Mauer unter demselben Gesichtswinkel (α) erscheint. Es wird behauptet, daß, wenn (a) die Entfernung der Beobachtungspunkte bezeichnet, die Länge der Mauer $= a\,tg\,\alpha$ ist.

Es sei AB (Fig. 43) die Mauer, C, D die Beobachtungsorte, so gewählt, daß $ACB = BDA$, man verlängere CB, DA bis zum Durchschnitte in E, so ist $CED = 90^0$, (weil D südlich von A und C westlich von B liegt). Um $ABCD$ läßt sich nun, weil die Winkel bei C und D gleich sind, ein Kreis beschreiben, dessen Durchmesser

$$= \frac{AB}{\sin ACB} = \frac{CD}{\sin CAD} = \frac{CD}{\sin CAE}$$

$$= \frac{CD}{\cos ACB} \text{ ist,}$$

hieraus erhält man

$$AB = CD \,.\, \mathrm{tg}\, ACB = a\,tg\,\alpha.$$

200) Jemand steht auf einem Berge von bekannter Höhe und beobachtet die Depression der Spitze eines

anderen kegelförmigen Berges und gleichzeitig die Depression einer Person, die am Fuße des letzteren Berges und mit den beiden Bergspitzen in einer und derselben Vertikalebene steht. Die letztgenannte Person steigt in gerader Richtung und mit bekannter Geschwindigkeit den kegelförmigen Berg aufwärts und es wird ihre Depression von der Spitze des anderen Berges nach einer bestimmten Zeit wieder gemessen; wie hoch ist der kegelförmige Berg und wie groß ist seine Steigung?

Es sei $AB = h$ (Fig. 44) die bekannte Höhe des ersteren Berges CE die Seitenhöhe des kegelförmigen Berges, E dessen Spitze, $EF = x$ dessen Höhe, $ECF = \varphi$ dessen Steigung; ferner sei D der Standpunkt der aufsteigenden Person nach der Zeit t, v deren Geschwindigkeit, dann ist $CD = tv$. Sind endlich β, γ, δ die Depressionen von C, D, E für den Horizont von A, so ist $BAC = 90 - \beta$, $BAD = 90 - \gamma$, $BAE = 90 - \delta$, und daher

$$BH = h \cot \beta + tv \cos \varphi = (h - tv \sin \varphi) \cot \gamma,$$

$$tv (\cos \varphi + \sin \varphi \cot \gamma) = h (\cot \gamma - \cot \beta)$$

$$\frac{tv}{\sin \gamma} (\cos \varphi \sin \gamma + \sin \varphi \cos \gamma) = \frac{h \,.\, \sin (\beta - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma},$$

$$\sin (\varphi + \gamma) = \frac{h}{tv} \cdot \frac{\sin (\beta - \gamma)}{\sin \beta}.$$

Durch diese Gleichung läßt sich der Steigungswinkel φ berechnen.

Um die Höhe $EF = x$ zu bestimmen hat man nun die Gleichung

$$(h - x) \cot \delta = h \cot \beta + x \cot \varphi,$$

$$x (\cot \varphi + \cot \delta) = h (\cot \delta - \cot \beta),$$

$$x = \frac{\sin (\beta - \delta) \sin \varphi}{\sin (\varphi + \delta) \sin \beta} \cdot h.$$

201) Eine Person steht in einer bekannten Entfernung von zwei Thürmen so, daß sie die Spitze des einen Thurmes von der des andern gedeckt sieht; sie nähert sich hierauf in der durch die Fußpunkte der Thürme

bestimmten geraden Linie so weit, bis der Elevationswinkel der Spitze des entfernteren Thurms gerade halb groß ist als der des näheren; wie hoch sind die beiden Thürme?

Es seien CD, EF (Fig. 45.) die beiden Thürme; $ABCE$ eine Horizontallinie durch die Fußpunkte derselben, $A'B'C'E'$ eine Parallele mit ihr durch das Auge des Beobachters AA' in der ersten Station, wo also der Annahme gemäß $A'DF$ eine gerade Linie ist. Wenn B' das Auge des Beobachters in der zweiten Station ist, so ist nach der Annahme $DB'C' = 2\ FB'E'$. Ist nun $A'C' = a$, $A'E' = b$, $C'B' = c$ und setzt man $C'D = h$, $E'F = h'$, so ist

$$\frac{h'}{h} = \frac{b}{a}, \ \operatorname{tg} DB'C' = \frac{h}{a - c},$$

$$\operatorname{tg} FB'E' = \frac{h'}{b - c},$$

und weil $DB'C' = 2\ FB'E'$,

$$\frac{h}{a - c} = \frac{\dfrac{2\,h'}{b - c}}{1 - \left(\dfrac{h'}{b - c}\right)^2}$$

$$\text{oder } 1 - \left(\frac{h'}{b - c}\right)^2 = 2\left(\frac{a - c}{b - c}\right)\frac{h'}{h}$$

$$= \frac{2\,b}{a} \cdot \frac{a - c}{b - c},$$

$$\left(\frac{h'}{b - c}\right)^2 = 1 - \frac{2\,ab - 2\,bc}{ab - ac}$$

$$= \frac{2\,bc - ab - ac}{a\,(b - c)},$$

$$\text{mithin } h' = \sqrt{\frac{(b - c)\,(2\,bc - ab - ac)}{a}}$$

$$\text{und } h = \frac{a}{b} \cdot h' = \sqrt{\frac{a\,(b - c)\,(2\,bc - ab - ac)}{b}}.$$

Ist nun d die Höhe des Auges des Beobachters, so hat man

$$CD = h + d \text{ und}$$

$$EF = h' + d.$$

202) Ein Beobachter, welcher sich am Meeresgestade befindet, sieht so eben die Spitze eines über die See sich erhebenden Berges, dessen Höhe man = 5000 Fuß kennt. Derselbe erhebt sich hierauf in einem Ballon senkrecht bis zu einer Höhe von 15000 Fuß und beobachtet die Depression der Bergspitze = $1^0\ 53'\ 30''$. Wie groß ist der Erdradius und die Entfernung des Berges vom ersten Beobachtungsorte?

Es sei A (Fig. 46) der Beobachtungsort am Meeresufer, O der Erdmittelpunkt, $BC = h = 5000$ Fuß der Berg, so ist der Annahme gemäß AC eine Tangente an A. Ist $AD = h' = 15000$ Fuß und D der Beobachtungspunkt im Ballon, so ist $ACD = \delta = 1^0\ 53'\ 30''$, und also

$$AC = h' \cot \delta,$$

$$\text{und } AC^2 = h\,(2r + h) = h'^2 \cot^2 \delta,$$

$$2r + h = \frac{h'^2}{h} \cdot \cot^2 \delta,\ r = \frac{h'^2}{2h} \cot^2 \delta - \frac{h}{2}.$$

Setzt man die Werthe ein, so erhält man

$$r = \frac{(15000 \,.\, \cot 1^0\ 53'\ 30'')^2}{10000} - 2500.$$

$$\begin{aligned}
\lg 15000 &= 4{,}1760913 \\
\lg \cot 1^0\,53'\,30'' &= 11{,}4811202 - 10 \\
&\overline{\ 5{,}6572115} \\
&\overline{\ 11{,}3144230}\ (2 \\
\lg 10000 &= 4 \\
&\overline{\ 7{,}3144230} \\
\text{Num.} &= 20624000 \\
&\ \ \ \ \ \ \ 2500 \\
r &= \overline{20621500} \text{ Fuß} \\
&= \frac{20621500}{24000} \text{ Meilen} \\
&= 859{,}2 \text{ Meilen.}
\end{aligned}$$

203) Eine Säule, welche von einem Beobachter gerade in Ost-Süd-Ost erblickt wird, wirft um Mittag einen Schatten, dessen Spitze von dem Beobachter gerade in Nord-Ost gesehen wird. Die Elevation der Säule ist α^0 und die Schattenlänge a Fuß, wie hoch ist die Säule?

Es sei A (Fig. 47) der Standpunkt des Beobachters, B der Fuß der Säule, AO die Richtung nach Osten, C die Schattenspitze, dann ist $BAO = 22\frac{1}{2}^0$, $OAC = 45^0$ und $BC \perp AO$, weil die Sonne im Süden steht. Bezeichnet nun h die Höhe der Säule, so ist

$$AB = h \cot \alpha$$

$$\text{und weil } ABC = 67\tfrac{1}{2}^0 = BAC,$$

$$\text{und deshalb } ACB = 45^0,$$

$$\text{auch } AB = 2a \sin 22\tfrac{1}{2}^0,$$

$$\text{folglich } h \cot \alpha = a\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\text{und } h = a\sqrt{2 - \sqrt{2}} \,.\, \text{tg}\, \alpha.$$

Beispiel. $a = 125$;
$\alpha = 43^0\, 27'$.
$h = 90,807$.

204) Auf einem Thurme von 200 Fuß Höhe steht noch eine Spitze von 1 Fuß Höhe; unter welchem Gesichtswinkel wird diese Spitze einem Beobachter erscheinen, welcher 100 Fuß vom Thurme in der Horizontalebene, auf welcher derselbe steht, entfernt ist?

Es sei AB (Fig. 48) der Thurm, BC die Spitze, D der Punkt des Beobachters, so ist $AB = 200$, $BC = 1$ und $AD = 100$. Setzt man $BDA = \theta$ und $CDA = \varphi$, so ist

$$\text{tg}\, \theta = \frac{AB}{AD} = 2,$$

$$\text{tg}\, \varphi = \frac{AC}{AD} = \frac{201}{100} = 2,01;$$

folglich $\operatorname{tg}(\varphi + \theta) = \operatorname{tg} BDC = \frac{2{,}01 - 2}{1 + 4{,}02}$

$$= \frac{0{,}01}{5{,}02} = \frac{1}{502}.$$

Bei der Kleinheit des Bruches kann man den Bogen zu BDC nahe $= \frac{1}{502}$,

$$\text{also den Winkel } BDC = \frac{1}{502} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 60 \,.\, 60$$

$$= \frac{2062{,}65}{502} = 411''$$

$$= 6'\,51''.$$

Die logarithmische Berechnung ergiebt dasselbe Resultat.

205) Von einem Schiffe aus sieht man am äußersten Horizonte die Spitze eines Berges in einer Entfernung von (a) Meilen von dessen Fuße; nachdem sich das Schiff bis auf (b) Meilen genähert, erblickt man die Bergspitze unter dem Elevationswinkel (θ) gegen den Horizont; es wird behauptet, daß der Erdradius nahe $= \frac{a^2 - b^2}{2b} \cdot \cot \theta$ ist, außerdem soll die Höhe des Berges bestimmt werden.

Es sei (Fig. 49) O der Mittelpunkt der Erde, der Radius $OA = r$, C der Fuß des Berges CD, A und B die beiden Standpunkte des Schiffes, so ist AD eine Tangente an die Erdoberfläche, arc $AC = a$, arc $BC = b$ und

$$AOC = \frac{a}{r},\; BOC = \frac{b}{r} = \varphi,$$

$$OBD = 90 + \theta,$$

und wenn $CD = x$ gesetzt wird,

$$(r + x) \cos \frac{a}{r} = r,$$

$$\text{oder } (r + x)\left(1 - \frac{a^2}{2r^2}\right) = r \; (41) \ldots (A)$$

wenn man bei dem sehr kleinen Winkel den Sinus dem Bogen $\frac{a}{r}$ gleichsetzt. Es ist ferner

$$\frac{OD}{OB} = \frac{r + x}{r} = \frac{\sin(90 + \theta)}{\sin(90 + \theta + \varphi)},$$

$$\text{oder } \frac{r}{r + x} = \frac{\cos(\theta + \varphi)}{\cos\theta} = \cos\varphi - \operatorname{tg}\theta \sin\varphi.$$

Setzt man bei dem kleinen Winkel φ ebenfalls den Sinus dem Bogen $\frac{b}{r}$ gleich, so erhält man

$$\frac{r}{r + x} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} - \operatorname{tg}\theta \cdot \frac{b}{r} \ldots (B).$$

Die Vergleichung von (A) und (B) giebt

$$1 - \frac{a^2}{2r^2} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} - \operatorname{tg}\theta . \frac{b}{r},$$

woraus sich

$$r = \frac{a^2 - b^2}{2b} \cdot \cot\theta$$

angenähert bestimmt.

Aus (A) erhält man ferner

$$\frac{r + x}{r} = \frac{1}{1 - \frac{a^2}{2r^2}} = 1 + \frac{a^2}{2r^2},$$

wenn man den Bruch $\frac{a^4}{4r^4}$ wegen seiner Kleinheit unbeachtet läßt

$$x = \frac{a^2}{2r}$$

$$\text{oder } x = \frac{a^2 b \operatorname{tg}\theta}{a^2 - b^2}.$$

206) Ein Ballon steigt von der Erde auf mit einer bekannten gleichförmigen Geschwindigkeit (v) unter einer gegebenen Inclination (α) gegen den Horizont

und nach einer durch den Compaß bestimmten Richtung. Zu zwei verschiedenen Zeiten werden die Elevationen von einem bekannten Orte auf der Erde $= \beta$ und γ gemessen, ferner sind noch für den Meridian des bezeichneten Ortes die Azimuthe des Ballons zur Zeit seines Aufsteigens, sowie zu der der ersten Beobachtung gemessen worden. Wie hoch ist der Ballon zu jeder Zeit der Beobachtung gewesen?

Es sei A (Fig. 50) der Punkt, von welchem der Ballon aufsteigt, ABC der Weg, welchen er nimmt, D der Ort der Beobachtung. Fällt man BB', CC' auf den Horizont und zieht $AB'C'$, ferner DB, DC, DB', DC', so ist $BAB' = \alpha$, $BDB' = \beta$, $CDC' = \gamma$, $B'DA = \delta$ bekannt durch die beobachteten Azimuthe, $DAB' = \varepsilon$ durch den Compaß bestimmt. Bezeichnet nun t die Zeit, welche der Ballon braucht, um von B nach C zu gelangen, und $h = BB'$ die Höhe des Ballon zur Zeit seiner ersten Beobachtung, so ist

$$BC = tv, \; B'C' = tv \cos\alpha$$

$$CC' = h + tv \sin\alpha;$$

$$DB' = h \cot\beta,$$

$$DC' = (h + tv \sin\alpha) \cot\gamma,$$

und weil $DB'C' = \delta + \varepsilon$,

$$(h + tv \sin\alpha)^2 \cot^2\gamma =$$

$$(h \cot\beta)^2 + (tv \cos\alpha)^2 - 2h \cot\beta \,.\, tv \cos\alpha \cos(\delta + \varepsilon)$$

oder

$$(\cot^2\gamma - \cot\beta^2)\, h^2 + 2tv \sin\alpha\, [\cot^2\gamma + \cot\alpha \cot\beta \cos(\delta + \varepsilon)]\, h$$
$$= (tv \sin\alpha)^2 (\cot^2\alpha - \cot^2\gamma).$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in Bezug auf h, und es kann deshalb letzteres daraus leicht bestimmt werden.

207) Zwei Personen steigen in einem Luftballon auf. Nachdem sie ihre größte Höhe erreicht haben, erscheinen ihnen zwei Städte, von welchem die eine gerade südlich von der andern liegt, unter den De-

pressionswinkeln 45° und 60° bezüglich. Der Ballon geht von da ab horizontal weiter 15 Minuten lang mit einer Geschwindigkeit = 24 engl. Meilen in der Stunde und zwar in südöstlicher Richtung. Die Depressionen der Städte werden jetzt gerade halb so groß, als vorher gefunden. Welche Höhe hat der Ballon erreicht?

Es seien A und B (Fig. 51) die beiden Städte, C, D die Projectionen des Ballons auf den Horizont zur Zeit der beiden Beobachtungen und h die gesuchte Höhe des Ballons, so ist

$$AC = h \cot 60^0 = \frac{h}{\sqrt{3}},$$

$$CB = h \cot 45^0 = h,$$

$$AD = h \cot 30^0 = h\sqrt{3},$$

$$DB = h \cot 22\tfrac{1}{2}^0 = h\,(1 + \sqrt{2}).$$

Schneidet nun CD die verlängerte AB in E, so ist, da der Ballon südöstlich geht,

$$DEA = 135^0.$$

Nun ist $AB = \frac{9}{4}$, $DC = \frac{24}{4} = 6$,

und, wenn man $DAB = \theta$ setzt,

$$\cos\theta = \frac{AB^2 + AD^2 - DB^2}{2\,AB\,.\,AD}$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 3h^2 - (3 + 2\sqrt{2})\,h^2}{\frac{9}{2}h\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\frac{81}{8} - 4h^2\sqrt{2}}{9h\sqrt{3}} \quad \ldots (A).$$

Da $ADC = \theta - 135^0$ und im $\triangle ADC$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2\,AD\,.\,DC \cos ADC$$

ist, so erhält man durch Einsetzung der obigen Werthe

$$\frac{h^2}{3} = 3h^2 + 36 - 12h\sqrt{3}\cos(135 - \theta),$$

$$8h^2 + 108 - 36h\sqrt{3}\cos(135 - \theta) = 0,$$

$$2h^2 + 27 - 9h\sqrt{3}\sin(\theta - 45) = 0,$$

$$2h^2 + 27 - 9h\sqrt{3}\,.\,\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$2h^2\sqrt{2} + 27\sqrt{2} - 9h\sqrt{3}(\sin\theta - \cos\theta) = 0,$$

und wegen (A),

$$2h^2\sqrt{2} + 27\sqrt{2} + \left(\frac{81}{8} - 4h^2\sqrt{2}\right) = 9h\sqrt{3}\,.\,\sin\theta$$

oder $\left(\frac{81}{8} + 27\sqrt{2}\right) - 2h^2\sqrt{2} = 9h\sqrt{3}\,.\,\sin\theta \ldots (B)$

da nach (A)

$$\frac{81}{8} - 4h^2\sqrt{2} = 9h\sqrt{3}\cos\theta \ldots (C)$$

ist, so erhält man durch Addition der Quadrate von (B) und (C)

$$\left(\frac{81}{8} + 27\sqrt{2} - 2h^2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{81}{8} - 4h^2\sqrt{2}\right)^2 = 243h^2 \ldots (D).$$

Setzt man der Bequemlichkeit wegen $h = 3h'$, so geht (D) über in

$$\left(\frac{9}{8} + 3\sqrt{2} - 2h'^2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{8} - 4h'^2\right)^2 = 27h'^2,$$

oder

$$40h'^4 - 4\sqrt{2}\left(\frac{27}{8} + 3\sqrt{2}\right)h'^2 + \frac{81}{32} + \frac{27\sqrt{2}}{4} + 18 = 27h'^2,$$

oder

$$40h'^4 - \left(\frac{27\sqrt{2}}{2} + 51\right)h'^2 + \frac{81}{32} + \frac{27\sqrt{2}}{4} + 18 = 0 \ldots (E).$$

Aus dieser Gleichung läßt sich h bestimmen. Begnügt man sich mit einem angenäherten Werthe, so kann man für (E) nahe zu schreiben:

$$40h'^4 - 70h'^2 + 2{,}5 + 9{,}5 + 18 = 0$$

$$\text{oder } 40h'^4 - 70h'^2 + 30 = 0$$

$$h'^4 - \frac{7}{4}h'^2 + \frac{3}{4} = 0,$$

$$h'^2 = \frac{7 \pm 1}{8} = 1 \text{ oder } \frac{3}{4},$$

$$\text{mithin } h' = 1 \text{ oder } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{und } h = 3 \text{ oder } \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Anmerkung. In dieser Aufgabe ist $CB = h \cot 45^0 = h$ gar nicht in Rechnung gekommen, es geht hieraus hervor, daß zur Lösung derselben es hinreicht, wenn irgend drei der vier Depressionen gegeben sind.

208) Ein Beobachter, welcher sich ein Stück landeinwärts von einer Meeresküste befindet, notirt sich die Zeit, wo ein Dampfschiff vor einem am Gestade aufgesteckten Merkzeichen (Pfähle ꝛc.) vorbeipassirt, m Minuten später mißt er den Winkel zwischen dem Zeichen und dem Schiffe $= \alpha$ und wiederum nach n Minuten den betreffenden Winkel $= \alpha + \beta$. Es soll die Richtung, in welcher das Schiff steuert, gefunden werden.

Es seien A (Fig. 52) der Beobachter, E der aufgesteckte Pfahl und C, D, B die drei Positionen des Schiffs, dann ist

$$CAD = \alpha,$$

$$DAB = \beta$$

$$\text{und } CAB = \alpha + \beta.$$

Es handelt sich bei Lösung dieser Aufgabe nur darum den Winkel

$$DCA = \theta$$

zu bestimmen. Zu dem Ende hat man im $\triangle ACD$

$$\frac{AD}{\sin\theta} = \frac{m}{\sin\alpha} \quad (55)$$

und im $\triangle ADB$

$$\frac{AD}{\sin(\alpha + \beta + \theta)} = \frac{n}{\sin\beta} \quad (11) \text{ u. } (55),$$

folglich, wenn man die erste Gleichung durch die zweite dividirt

$$\frac{m \sin\beta}{n \sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha + \beta + \theta)}{\sin\theta}$$

$$= \sin(\alpha + \beta) \cot\theta + \cos(\alpha + \beta) \quad (21) \text{u.} (3).$$

Hieraus erhält man

$$\cot\theta = \frac{m \sin\beta}{n \sin\alpha \sin(\alpha + \beta)} - \cot(\alpha + \beta).$$

Setzt man

$$\frac{m \sin\beta}{n \sin\alpha \sin(\alpha + \beta)} = \cot\varepsilon$$

und der Kürze wegen

$$\alpha + \beta = \delta,$$

so hat man

$$\cot\theta = \cot\varepsilon - \cot\delta$$

$$= \frac{\sin(\delta - \varepsilon)}{\sin\delta \sin\varepsilon}.$$

209) Ein Punkt A soll seiner Lage nach bestimmt werden, wenn die Lage zweier anderen Punkte B und C bestimmt ist und man von A nach B und C wohl sehen, aber nicht kommen kann, wenn man ferner aber von A nach einem in der Verlängerung von BC liegenden Punkte D, von welchem aus alle übrigen Punkte sichtbar sind, kommen kann. (Problem vom Seitwärts-Einschneiden.)

Es sei (Fig. 53) $BC = a$; man messe $BAC = \alpha$, $CAD = \alpha'$, $ADC = \delta$, dann hat man $BCA = \alpha' + \delta$

$$\text{und } AB = \frac{BC. \sin ACB}{\sin BAC}$$

$$= \frac{a \sin(\alpha' + \delta)}{\sin\alpha}.$$

$$AC = \frac{BC.\ \sin ABC}{\sin BAC}$$

$$= \frac{a \sin (\alpha + \alpha' + \delta)}{\sin \alpha}$$

210) Aus drei ihrer Lage nach auf dem Felde gegebenen Punkten A, B, C die Lage eines vierten Punktes D zu bestimmen, wenn außer den Seiten und Winkeln des gegebenen Dreiecks ABC nur die Winkel gemessen werden können, welche die von D an die drei Punkte A, B, C gezogenen Visirlinien unter sich bilden. (Problem vom Rückwärtseinschneiden oder sogenanntes Pothenot'sches Problem.)

Es sei (Fig. 54.)

$$BC = a,\ AC = b,\ AB = c,$$

$$CDB = \alpha,\ CDA = \beta,\ ADB = \gamma.$$

Setzt man $CAD = \varphi$ und $CBD = \psi$, so wäre die Aufgabe offenbar gelöst, wenn φ und ψ bekannt wäre.

Es ist nun im $\triangle\ ACD$

$$CD = \frac{b \sin \varphi}{\sin \beta} \dots \text{(I)},$$

ferner im $\triangle\ BCD$

$$CD = \frac{a \sin \psi}{\sin \alpha} \dots \text{(II)},$$

folglich ist

$$\frac{b \sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{a \sin \psi}{\sin \alpha}.$$

oder

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} \dots \text{(III)},$$

also auch

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} - 1 = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} - 1$$

oder $$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\psi} = \frac{a\sin\beta - b\sin\alpha}{b\sin\alpha} \quad \ldots \text{(IV)},$$

ferner, wenn in (III) beiderseits 1 addirt wird,

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} + 1 = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha} + 1$$

oder $$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\psi} = \frac{a\sin\beta + b\sin\alpha}{b\sin\alpha} \quad \ldots \text{(V)}.$$

Dividirt man (IV) durch (V), so erhält man

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{a\sin\beta - b\sin\alpha}{a\sin\beta + b\sin\alpha} \quad \ldots \text{(VI)}.$$

Nun ist

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi - \psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi + \psi}{2}} \; (50) \ldots \text{(VII)}$$

und ferner

$$\frac{a\sin\beta - b\sin\alpha}{a\sin\beta + b\sin\alpha} = \frac{1 - \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}}{1 + \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta} \quad \ldots \text{(VIII)},$$

wenn

$$\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta} = \operatorname{tg}\theta;$$

gesetzt wird. Setzt man die Werthe unter (VII) und (VIII) in (VI) ein, so erhält man

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi - \psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi + \psi}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta}$$

$$= \operatorname{tg}(45^0 - \theta)$$

oder

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} (45^0 - \theta) \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2},$$

oder weil

$$\varphi + \psi = 360^0 - (C + \gamma)$$

ist,

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} (45^0 - \theta) \operatorname{tg} \frac{C + \gamma}{2} \quad (11).$$

Da nun sowohl

$$\frac{\varphi + \psi}{2}$$

als auch

$$\frac{\varphi - \psi}{2}$$

bekannt sind, so lassen sich φ und ψ berechnen.

Beispiel. Es sei $a = 312$
$b = 520$
$C = 65^0\ 27'$
$\alpha = 23^0\ 25'$
$\beta = 32^0\ 52$

$$C + \alpha + \beta = C + \gamma = 121^0\ 44'$$

$$\varphi + \psi = 360^0 - (C + \gamma) = 238^0\ 16'$$

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 119^0\ 8'.$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{520 \sin 23^0\ 25'}{312 \sin 32^0\ 52'}.$$

$\log 520 = 2{,}7160033$
$\log \sin 23^0\ 25' = 9{,}5992441$
$12{,}3152474 - 10$
$\log 312 = 2{,}4941546$
$\log \sin 32^0\ 52' = 9{,}7345485$
$2{,}2287031$
$\log \operatorname{tg} \theta = 10{,}0865443 - 10$
$\theta = 50^0\ 40^0\ 17'',\ 1.$

Nun ist

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} (45^0 - \theta) \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2}$$

$$= \operatorname{tg}(\theta - 45^0)\ \operatorname{tg}\left(180^0 - \frac{\varphi + \psi}{2}\right)$$

$$= \operatorname{tg} 5^0\ 40'\ 17'', 1\ .\ \operatorname{tg} 60^0\ 52'.$$

$$\log \operatorname{tg} 5^0\ 40'\ 17'', 1 = 8{,}9969906 - 10$$
$$\log \operatorname{tg} 60^0\ 52' = 10{,}2538680 - 10$$

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = 9{,}2508586 - 10$$
$$\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = 10^0\ 6'\ 10'', 5$$
$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = 119^0\ 8'$$
$$\varphi = 129^0\ 14'\ 10'', 5$$
und $\psi = 109^0\ 1'\ 49'', 5.$

Da in den Dreiecken ACD und BCD je drei Stücke bekannt sind, so lassen sich die Linien BD, CD, AD leicht berechnen.

Es ist

$$CD = \frac{b \sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{a \sin \psi}{\sin \alpha}$$

$$\log b = 2{,}7160033$$
$$\log \sin \varphi = 9{,}8890463$$

$$12{,}6050496 - 10$$
$$\log \sin \beta = 9{,}7345485 - 10$$

$$\log CD = 2{,}8705011$$
$$CD = 742{,}07.$$

Wird CD der Controle wegen nach dem zweiten Ausdrucke berechnet, so ist

$$\log a = 2{,}4941546$$
$$\log \sin \psi = 9{,}9755906 - 10$$

$$12{,}4697452 - 10$$
$$\log \sin \alpha = 9{,}5992441 - 10$$

$$\log CD = 2{,}8705011$$
$$CD = 742{,}07.$$

211) Auf einem Abhange steht ein Obelisk; um dessen Höhe zu finden, mißt Jemand von dessen Fuße aus den Abhang herab eine Strecke ($= a$) ab und beobachtet an deren Ende die Elevation (θ) der Spitze des Obelisken gegen den Abhang, hierauf mißt er in der vorher angenommenen Richtung eine zweite Strecke ($= a'$) ab und beobachtet wieder die entsprechende Elevation (θ'). Wie ist aus diesen Elementen die Höhe des Obelisken zu finden?

Es ist (Fig. 55)

$$AO = a,\ BA = a',$$

$$OAo = \theta,\ OBA = \theta',$$

folglich $AO : a' = \sin\theta' : \sin(\theta - \theta')$,

$$AO = \frac{a' \sin\theta'}{\sin(\theta - \theta')} = b.$$

Wird $AOo = \varphi$ und $AoO = \psi$ gesetzt, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi},$$

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\psi+\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\psi-\varphi}{2}} \quad (62),$$

$$\operatorname{tg}\frac{\psi-\varphi}{2} = \frac{b-a}{b+a} \cdot \operatorname{tg}\frac{\psi+\varphi}{2}$$

$$= \frac{b-a}{b+a} \cdot \cot\frac{\theta}{2}.$$

Somit ist

$$\frac{\psi-\varphi}{2} = \mu \text{ bekannt, aber auch}$$

$$\frac{\psi+\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2},$$

folglich auch

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\theta}{2} + \mu\right)$$

$$\text{und } Oo = a \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{a \sin\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \mu\right)}.$$

Beispiel. Gegeben sind: $a = 54$, $a' = 61$,

$$\theta = 79^0\ 36'\ 40'',$$

$$\theta' = 64^0\ 25'\ 18'',6.$$

Es ist

$$AO = b = \frac{61 \quad \sin 64^0\ 25'\ 18'',\ 6}{\sin 15^0\ 11'\ 21'',\ 4.}$$

$$\begin{aligned}
\log 61 &= 1{,}7853298 \\
\sin 64^0\ 25'\ 18'',\ 6 &= 9{,}9552051 - 10 \\
&\quad 11{,}7405349 - 10 \\
\log 15^0\ 11'\ 21'',\ 4 &= 9{,}4183145 - 10 \\
\log b &= 2{,}3222204 \\
b &= 210
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\psi - \varphi}{2} = \frac{b - a}{b + a} \cdot \cot \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{156 \cdot \cot 39^0\ 48'\ 20''}{264}$$

$$\begin{aligned}
\log 156 &= 2{,}1931246 \\
\log \cot 39^0\ 48'\ 20'' &= 10{,}0791815 - 10 \\
&\quad 12{,}2723061 - 10 \\
\log 264 &= 2{,}4216039 \\
\log \operatorname{tg} \frac{\psi - \varphi}{2} &= 9{,}8507022
\end{aligned}$$

$$\frac{\psi - \varphi}{2} = 35^0\ 20'\ 24'',\ 5 = \mu,$$

$$39^0\ 48'\ 20'' = \frac{\theta}{2}$$

$$75^0\ \ 8'\ 44'',\ 5 = \mu + \frac{\theta}{2}$$

$$\varphi = 14^0\ 51'\ 15'',\ 5 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\theta}{2} + \mu\right)$$

$$Oo = \frac{54 \cdot \sin 79^0\ 36'\ 40''}{\sin 14^0\ 51''\ 15'',\ 5}$$

$$\begin{aligned}
\log 54 &= 1{,}7323938 \\
\log \sin 79^0\ 36'\ 40'' &= 9{,}9928059 - 10 \\
&\qquad 154 \\
&\quad 11{,}7252151 - 10 \\
\log \sin 14^0\ 51'\ 15'',\ 5 &= 9{,}4088536 - 10 \\
\log Oo &= 2{,}3163615 \\
Oo &= 207{,}189.
\end{aligned}$$

212) Auf einer fünfeckigen Billardtafel mit ungleichen aber gegebenen Seiten und Winkeln soll ein Ball so gegen eine der Seiten gestoßen werden, daß er an alle übrigen der Reihe nach anschlägt und fortwährend dieselbe Bahn beschreibt. Es soll der

Punkt, in welchem der Ball zuerst anschlagen muß, und die Richtung des Stoßes gefunden werden?

Es seien *ABCDE* (Fig 56) das Billard, *abcde* der Weg des Balles und α, β, γ, δ, ε bezüglich die Winkel (Ein- und Ausfallswinkel sind natürlich gleich) bei *a*, *b*, *c*, *d*, *e* welche die Ballrichtungen mit den Billardseiten einschließen. Werden ferner die Seiten *AB*, *BC*, *etc*, mit *a*, *b*, *c*, *d*, *e* bezeichnet und

$$aB = u,\ bC = v,\ cD = x,$$

$$dE = y \text{ und } eA = z$$

gesetzt, so hat man zunächst die Gleichungen

$$1)\ \alpha + \beta + B = \pi$$

$$2)\ \beta + \gamma + C = \pi$$

$$3)\ \gamma + \delta + D = \pi$$

$$4)\ \delta + \varepsilon + E = \pi$$

$$5)\ \varepsilon + \alpha + A = \pi$$

und hieraus

$$6)\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi - B - D \text{ aus } 1) \text{ u. } 3);$$

$$7)\ \alpha + \beta + \delta + \varepsilon = 2\pi - B - E \quad ,,\ 1)\ ,,\ 4);$$

$$8)\ \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 2\pi - C - E \quad ,,\ 2)\ ,,\ 4);$$

$$9)\ \beta + \gamma + \varepsilon + \alpha = 2\pi - C - A \quad ,,\ 2)\ ,,\ 5);$$

$$10)\ \gamma + \delta + \varepsilon + \alpha = 2\pi - D - A \quad ,,\ 3)\ ,,\ 5);$$

mithin

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$$

$$= \frac{5}{2}\pi - \frac{A + B + C + D + E}{2}$$

oder

$$11)\ \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \frac{5}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi$$

$$= \pi.$$

Werden hiervon die Werthe unter 6) bis 10) subtrahirt, so erhält man

$$12)\ \alpha = C + E - \pi,$$

$$13)\ \beta = D + A - \pi,$$

$$14)\ \gamma = B + E - \pi,$$

$$15)\ \delta = C + A - \pi,$$

$$16)\ \varepsilon = B + D - \pi,$$

und ist somit die Richtung des Stoßes bekannt.

Es ergeben sich ferner ohne Weiteres die Gleichungen

$$17)\ \frac{b-v}{u} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = m,$$

$$18)\ \frac{c-x}{v} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = n,$$

$$19)\ \frac{d-y}{x} = \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = p,$$

$$20)\ \frac{e-z}{y} = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} = q,$$

$$21)\ \frac{a-u}{z} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha} = r.$$

Um hieraus v, x, y, z zu eliminiren hat man

$$z = \frac{a-u}{r} \text{ aus 21)}$$

folglich $y = \dfrac{e-z}{q}$ aus 20)

$$= \frac{e}{q} - \frac{a-u}{rq},$$

ferner $x = \dfrac{d-y}{p}$ aus 19)

$$= \frac{d}{p} - \frac{e}{pq} + \frac{a-u}{pqr},$$

ferner $v = \dfrac{c-x}{n}$ aus 18)

$$= \frac{c}{n} - \frac{d}{np} + \frac{e}{npq} - \frac{a-u}{npqr},$$

endlich $u = \dfrac{b-v}{m}$ aus 17)

$$= \frac{b}{m} - \frac{c}{mn} + \frac{d}{mnp} - \frac{e}{mnpq} + \frac{a-u}{mnpqr}$$

$$mnpqr\,u = npqr\,b - pqr\,c + qr\,d - re + a - u$$

Durch Vergleichung von (A) und (B) erhält man aber

$$a(-1)^\alpha = a,\ b(-1)^\beta = b,\ c(-1)^\gamma = c,\ etc.;$$

woraus hervorgeht, daß α, β, γ, *etc.* gerade Zahlen sein müssen.

c) Setzt man

$$\sin\theta = a\theta^\alpha + b\theta^\beta + c\theta^\gamma + etc. \ldots (C)$$

so kann kein Exponent negativ sein, weil sonst für $\theta = 0$, $\sin 0 = \infty$ erhalten werden würde.

d) Da $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, so erhält man aus (C)

$$a(-\theta)^\alpha + b(-\theta)^\beta + c(-\theta)^\gamma + etc. =$$
$$-(a\theta^\alpha + b\theta^\beta + c\theta^\gamma + etc.)$$

Durch Gleichsetzung der Coeffizienten gleich hoher Potenzen von θ erhält man

$$a(-1)^\alpha = -a,$$
$$b(-1)^\beta = -b,$$
$$c(-1)^\gamma = -c,\ etc.,$$

welchen Gleichungen nur genügt wird, wenn α, β, γ *etc.* ungerade Zahlen sind.

214) Es soll die Summe der n ersten Glieder folgender Reihe

$$S = \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} + \sin\frac{5\theta}{2} + \ldots$$

gefunden werden.

Es ist

$$1 - \cos\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} \quad (41)$$

$$\left.\begin{array}{rcl}
\cos\theta - \cos 2\theta &=& 2\sin\frac{3\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} \\
\cos 2\theta - \cos 3\theta &=& 2\sin\frac{5\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} \\
\vdots & & \vdots \\
\cos(n-1)\theta - \cos n\theta &=& 2\sin(2n-1)\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}
\end{array}\right\} (38)$$

$$1 - \cos n\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot S,$$

$$S = \frac{1 - \cos n\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{n\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

215) Es soll die Summe der n ersten Glieder folgender Reihe

$$S = tg\,\theta\, sec\, 2\theta + tg\, 2\theta\, sec\, 4\theta + tg\, 4\theta\, sec\, 8\theta + \ldots$$

gefunden werden.

Es ist

$$\cos 2\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg} 2\theta - \operatorname{tg}\theta} \quad (§.\ 14),$$

folglich

$$\operatorname{tg}\theta \sec 2\theta = \operatorname{tg} 2\theta - \operatorname{tg}\theta$$

und analog

$$\operatorname{tg} 2\theta \sec 4\theta = \operatorname{tg} 4\theta - \operatorname{tg} 2\theta,$$

$$\operatorname{tg} 4\theta \sec 8\theta = \operatorname{tg} 8\theta - \operatorname{tg} 4\theta$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\operatorname{tg} 2^{n-1}\theta \,.\, \sec 2^n\theta = \operatorname{tg} 2^n\theta - \operatorname{tg} 2^{n-1}\theta,$$

$$S = \operatorname{tg} 2^n\theta - \operatorname{tg}\theta.$$

216) Es soll die Summe folgender Doppelreihe

$$S = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg} 2\theta + \ldots + \operatorname{tg} 2^{n-2}\theta$$

$$+ \cot\theta + \cot 2\theta + \cot 4\theta + \ldots + \cot 2^{n-1}\theta$$

gefunden werden.

Es ist

$$2 \cot \theta = \cot \frac{\theta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (48),$$

folglich

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \cot \theta = \cot \frac{\theta}{2} - \cot \theta$$

und analog

$$\operatorname{tg} \theta + \cot 2\theta = \cot \theta - \cot 2\theta$$

$$\operatorname{tg} 2\theta + \cot 4\theta = \cot 2\theta - \cot 4\theta$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\operatorname{tg} 2^{n-2}\theta + \cot 2^{n-1}\theta = \cot 2^{n-2}\theta - \cot 2^{n-1}\theta$$

$$S = \cot \frac{\theta}{2} - \cot 2^{n-1}\theta.$$

217) Die Summe der Reihe

$$S = \left(1 - 3^{-\frac{1}{2}}\right) - \tfrac{1}{3}\left(1 - 3^{-\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{5}\left(1 - 3^{-\frac{5}{2}}\right) + \ldots$$

zu finden.

Es ist

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \tfrac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right] + \tfrac{1}{5}\left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5\right] + \ldots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - etc.$$

$$- \left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5\right] - etc.$$

$$= \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (66)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \quad (10) \text{ und } (18)$$

$$= \frac{\pi}{12}.$$

218) Die Summe der Reihe

$$S = \frac{3}{1\,.\,5} - \frac{5}{3\,.\,7} + \frac{11}{9\,.\,13} - \frac{13}{11\,.\,15} + \frac{19}{17\,.\,21} - \ldots$$

zu finden.

Es ist

$$\frac{3}{1\,.\,5} - \frac{5}{3\,.\,7} + \frac{11}{9\,.\,13} - \ldots$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{6}{1\,.\,5} - \frac{10}{3\,.\,7} + \frac{22}{9\,.\,13} - \ldots\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{5+1}{1\,.\,5} - \frac{7+3}{3\,.\,7} + \frac{9+13}{9\,.\,13} - \ldots\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(1 + \tfrac{1}{5}) - (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7}) + (\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{13}) - \ldots\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{4} \quad (66)$$

$$= \frac{\pi}{8}.$$

219) Die Summe der Reihe

$$S = 3^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{3+1}{2}\right) - 3^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{3^3+1}{3}\right) + 3^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{3^5+1}{5}\right) - 3^{-\frac{7}{2}}\left(\frac{3^7+1}{7}\right) + \ldots.$$

zu finden.

Es ist

$$S = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\,.\left(\frac{3+1}{1}\right) - \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}\,.\left(\frac{3^3+1}{3}\right) + \frac{1}{3^{\frac{5}{2}}}\,.\left(\frac{3^5+1}{5}\right) - \ldots$$

$$= \left(3^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\right) - \tfrac{1}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}\right) + \tfrac{1}{5}\left(3^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3^{\frac{5}{2}}}\right) - \ldots$$

$$= \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) - \tfrac{1}{3}\left(\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{6}\right) + \tfrac{1}{5}\left(\operatorname{tg}^5\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}^5\frac{\pi}{6}\right) - \ldots (18)$$

$$= \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \tfrac{1}{3}\cdot\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{3} + \ldots\right) + \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{6} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (66)$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

220) Es sollen bewiesen werden, daß

$$S = \tfrac{1}{2}\cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\cos^4\theta + \tfrac{1}{6}\cos^6\theta + \ldots = \log.\,nat.\,\operatorname{cosec}\theta$$

ist.

Setzt man $\cos^2\theta = x$,

so hat man

$$S = \tfrac{1}{2}\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cdot\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}\log.\,\text{nat.}\,(1 - x)\text{*)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\log.\,\text{nat.}\,1 - \log.\,\text{nat.}\,(1 - x)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\log.\,\text{nat.}\,\frac{1}{1 - x}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log.\,\text{nat.}\,\frac{1}{1 - \cos^2\theta}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log.\,\text{nat.}\,\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log.\,\text{nat.}\,\operatorname{cosec}^2\theta$$

$$= \log.\,\text{nat.}\,\operatorname{cosec}\theta.$$

221) Es soll bewiesen werden, daß

$$\cos\theta\,.\,\cos 2\theta\,.\,\cos 4\theta\,.\,\cos 8\theta\,\ldots\,\cos 2^{n-1}\theta = \frac{\sin 2^n\theta}{2^n\sin\theta}$$

ist.

Es ist

*) S. mein Lehrb. der algebr. Analysis, §. 73.

$$\cos\theta = \frac{2\sin\theta\ \cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta},$$

$$\cos 2\theta = \frac{\sin 4\theta}{2\sin 2\theta},$$

$$\cos 4\theta = \frac{\sin 8\theta}{2\sin 4\theta},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\cos 2^{n-1}\theta = \frac{\sin 2^n.\theta}{2\sin 2^{n-1}.\theta}$$

$$\cos\theta . \cos 2\theta . \cos 4\theta \ldots \cos 2^{n-1}.\theta = \frac{\sin 2^n\theta}{2^n.\sin\theta}.$$

222) Aus der Gleichung

$$\sin 8\theta . \cos 8\theta . \cos 16\theta \ldots \cos 256\theta = -\tfrac{1}{64}$$

den Werth von θ zu finden.

Setzt man in der Gleichung (§. 221) 8θ für θ ein, so hat man, wenn man noch beiderseits mit $\sin 8\theta$ multiplicirt, und $n = 6$ setzt,

$$\sin 8\theta . \cos 8\theta . \cos 16\theta \ldots \cos 256\theta = \frac{\sin 512\theta . \sin 8\theta}{64\sin 8\theta}$$

$$= \frac{\sin 512\theta}{64}$$

$$= -\tfrac{1}{64},$$

$$\text{also } \sin 512\theta = -1 = \sin 270^0,$$

$$512\theta = 270^0$$

$$\theta = \frac{270}{512} = \frac{135}{256}$$

$$= 31'\ 38''\ 26'''.$$

223) Die Summe der Reihe

$$S = \cos\alpha\cos\beta + \cos 2\alpha\cos 2\beta + \cos 3\alpha\cos 3\beta + \ldots + \cos n\alpha\cos n\beta$$

zu finden.

Ist

$$S = \cos\alpha \cos\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta + \ldots + \cos n\alpha \cos n\beta,$$

so ist

$$2S = \cos(\alpha - \beta) + \cos 2(\alpha - \beta) + \ldots + \cos n(\alpha - \beta)$$
$$+ \cos(\alpha + \beta) + \cos 2(\alpha + \beta) + \ldots + \cos n(\alpha + \beta) \quad (25).$$

Setzt man nun

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \Sigma,$$

so ist noch (42) und (25)

$$2\Sigma\cos\varphi = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos(n-1)\varphi$$
$$+ \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cos 4\varphi + \ldots + \cos(n+1)\varphi$$
$$= 1 + \Sigma - \cos n\varphi + \Sigma - \cos\varphi + \cos(n+1)\varphi$$

oder

$$2\Sigma(1 - \cos\varphi) = \cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi - (1 - \cos\varphi),$$

$$\Sigma = \frac{\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi}{2(1 - \cos\varphi)} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2\sin\frac{n\varphi + \varphi + n\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi + \varphi - n\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Setzt man für φ bezüglich $(\alpha - \beta)$ und $(\alpha + \beta)$, so geht die obige Gleichung für $2S$ über in

$$2S = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\alpha - \beta)}{2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\alpha + \beta)}{2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}} - \frac{1}{2},$$

$$\text{oder } S = \frac{1}{4}\left\{\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} - 2\right\}.$$

224) Es soll der Ausdruck

$$Log\,(a\,cos^2\,\theta + b\,sin^2\,\theta),$$

worin *Log* den natürlichen Logarithmus bezeichnet, in einer Reihe entwickelt werden von der Form

$$A + B\,cos^2\,\theta + C\,cos^2\,2\theta + D\,cos^2\,3\theta + etc.$$

Es ist

$$a\cos^2\theta + b\sin^2\theta = \frac{a(1+\cos 2\theta)}{2} + \frac{b(1-\cos 2\theta)}{2}$$

$$= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\theta$$

$$= (\alpha + \beta x)\left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right),$$

wo α, β, x bestimmt werden durch die Gleichungen

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{a+b}{2},$$

$$2\alpha\beta = \frac{a-b}{2},$$

$$\text{und } x + \frac{1}{x} = \cos 2\theta,$$

aus denen zunächst sich

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b}),\ \beta = \tfrac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$\text{mithin } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \text{ bestimmt.}$$

Es ist nun

$$\text{Log}\,(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta) = \text{Log}\,(\alpha + \beta x)\left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right)$$

$$= 2\,\text{Log}\,\alpha + \text{Log}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}x\right)$$

$$+ \text{Log}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= 2 \operatorname{Log} \alpha + \frac{\beta}{\alpha}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \text{etc.} \ldots (A)$$ (Algebr. Analysis. §. 71).

Da $x + \frac{1}{x} = 2 \cos 2\theta$,

so ist $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 4 \cos^2 2\theta = 2(1 + \cos 4\theta)$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \cos 4\theta,$$

ferner

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 4 \cos 4\theta \cos 2\theta$$

oder

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} = 4 \cos 4\theta \cos 2\theta,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2(2 \cos 4\theta \cos 2\theta - \cos 2\theta)$$

$$= 2 \cos 6\theta \quad (25);$$

ferner

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4 \cos 6\theta \cos 2\theta,$$

oder

$$x^4 + \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} = 4 \cos 6\theta \cos 2\theta,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 4 \cos 6\theta \cos 2\theta - 2 \cos 4\theta$$

$$= 2 \cos 8\theta \quad (25),$$

ferner

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4 \cos 8\theta \cos 2\theta,$$

oder

$$x^5 + \frac{1}{x^5} + x^3 + \frac{1}{x^3} = 4 \cos 8\theta \cos 2\theta,$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 4 \cos 8\theta \cos 2\theta - 2 \cos 6\theta$$

$$= 2 \cos 10\theta \quad (25),$$ u. s. w.

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung (A) erhält man:

$$\mathrm{Log}\,(a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta)$$

$$= 2 \mathrm{Log}\, \alpha + 2 \left[\frac{\beta}{\alpha} \cos 2\theta - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \cos 4\theta + \tfrac{1}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 \cos 6\theta - \text{etc.}\right]$$

$$= 2 \mathrm{Log}\, \alpha + 2 \left[\frac{\beta}{\alpha} (2 \cos^2 \theta - 1) - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 (2 \cos^2 2\theta - 1) + \tfrac{1}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 (2 \cos^2 3\theta - 1) - \text{etc.}\right]$$

$$= 2 \mathrm{Log}\, \alpha - 2 \left[\frac{\beta}{\alpha} - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \tfrac{1}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - \text{etc.}\right] + 4 \left\{\frac{\beta}{\alpha} \cos^2 \theta - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \cos^2 2\theta + \tfrac{1}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 \cos^2 3\theta - \text{etc.}\right\}$$

$$= 2 \left[\mathrm{Log}\, \alpha - \mathrm{Log}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right] + 4 \left\{\frac{\beta}{\alpha} \cos^2 \theta - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \cos^2 2\theta + \text{etc.}\right\}$$

$$= 2 \mathrm{Log}\, \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} + 4 \left[\frac{\beta}{\alpha} \cos^2 \theta - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \cos^2 2\theta + \text{etc.}\right]$$

$$= 2 \mathrm{Log}\, \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2 \sqrt[4]{a}} + 4 \left[\frac{\beta}{\alpha} \cos^2 \theta - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \cos^2 2\theta + \tfrac{1}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 \cos^2 3\theta - \text{etc.}\right],$$

wo $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ zu substituiren ist.

Elftes Kapitel.

Vermischte Aufgaben.

225) Einen Winkel in zwei Theile zu theilen, so daß die Sinus dieser Stücke ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Ist a der gegebene Winkel und bezeichnet x das eine Stück, dann ist $a - x$ das andere und folglich, wenn $1 : n$ das gegebene Verhältniß ist,

$$\sin(a - x) = n \sin x$$

$$\sin a \cos x - \cos a \sin x = n \sin x,$$

$$\sin a \cot x - \cos a = n$$

$$\cot x = \cot a + n \operatorname{cosec} a.$$

226) Einen gegebenen Winkel so in zwei Theile zu theilen, daß die Tangenten dieser Theile ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Ist a der gegebene Winkel und bezeichnet x einen seiner Theile, so ist $a - x$ der andere, und folglich, wenn $1 : n$ das gegebene Verhältniß ist

$$\operatorname{tg} x : \operatorname{tg}(a - x) = 1 : n$$

$$\operatorname{tg}(a - x) = n \operatorname{tg} x,$$

$$\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} x} = n \operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} x = n \operatorname{tg} x + n \operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \frac{n+1}{n \operatorname{tg} a} \operatorname{tg} x - \frac{1}{n} = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{n+1}{2n \operatorname{tg} a} \pm \sqrt{\frac{(n+1)^2}{4n^2 \operatorname{tg}^2 a} + \frac{1}{n}}.$$

Nun ist

$$\frac{(n+1)^2}{4n^2 \operatorname{tg}^2 a} + \frac{1}{n} = \frac{n^2 + 2n + 1 + 4n \operatorname{tg}^2 a}{4n^2 \operatorname{tg}^2 a}$$

$$= \frac{n^2 - 2n + 1 + 4n(1 + \operatorname{tg}^2 a)}{4n^2 \operatorname{tg}^2 a}$$

$$= \frac{(n-1)^2 + 4n \sec^2 a}{4n^2 \operatorname{tg}^2 a} \quad (6),$$

mithin

$$\operatorname{tg} x = \frac{\pm\sqrt{(n-1)^2 + 4n \sec^2 a} - (n+1)}{2n \operatorname{tg} a}.$$

227) Der Ausdruck

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$$

soll auf die bequemste Weise durch Einführung eines Hülfswinkels logarithmisch berechnet werden.

Man setze $\cos\theta = \frac{b}{a}$,

dann ist

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \frac{b}{a}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{a+b}{2a}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{2a}},$$

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{b}{a}$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{a-b}{2a}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a}},$$

folglich

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} = \sqrt{2a}\,.\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{a}\,.\cos\left(45 - \frac{\theta}{2}\right)$$

und also

$$\log\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}\right) = \log 2 + \tfrac{1}{2}\log a$$

$$+ \log\cos\left(45 - \frac{\theta}{2}\right).$$

228) Wenn

$$\sqrt[3]{tg\left(45 - \frac{z}{2}\right)} = tg\ u,$$

so ist

$$\sqrt[3]{tg\ z + sec\ z} + \sqrt[3]{tg\ z - sec\ z} = 2\cot u.$$

Es ist

$$\operatorname{tg}\left(45-\frac{z}{2}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{z}{2}} \quad (52)$$

und $\operatorname{tg} z+\sec z=\frac{\sin z}{\cos z}+\frac{1}{\cos z}$

$$=\frac{\sin z+1}{\cos z}$$

$$=\frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}+\cos^2\frac{z}{2}+\sin^2\frac{z}{2}}{\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}} \quad (27,\ 2 \text{ u. } 31)$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{z}{2}+\sin\frac{z}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{z}{2}+\sin\frac{z}{2}}{\cos\frac{z}{2}-\sin\frac{z}{2}}$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{z}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}^3 u}\cdot\cdot\cdot(\alpha)$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} z-\sec z=\frac{\sin z-1}{\cos z}$$

$$=\frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}-\left(\cos^2\frac{z}{2}+\sin^2\frac{z}{2}\right)}{\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}}$$

$$=\frac{-\left(\cos\frac{z}{2}-\sin\frac{z}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}}$$

$$= \frac{-\left(\cos\frac{z}{2} - \sin\frac{z}{2}\right)}{\cos\frac{z}{2} + \sin\frac{z}{2}}$$

$$= -\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{z}{2}}$$

$$= -\operatorname{tg}^3 u \ldots (\beta).$$

Aus (α) und (β) folgt nun

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg} z + \sec z} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} z - \sec z}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} u} - \operatorname{tg} u$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 u}{\operatorname{tg} u} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2u}$$

$$= 2 \cot 2u.$$

229) Den Werth des Winkels x zu bestimmen, welcher der Gleichung

$$\sin a + \sin(x-a) + \sin(2x+a) = \sin(x+a) + \sin(2x-a)$$

genügt.

Aus der gegebenen Gleichung erhält man

$$\sin a + \sin x \cos a - \cos x \sin a + \sin 2x \cos a + \cos 2x \sin a$$
$$= \sin x \cos a + \cos x \sin a + \sin 2x \cos a - \cos 2x \sin a$$

und hieraus

$$\sin a - 2\cos x \sin a + 2\cos 2x \sin a = 0$$

$$1 - 2\cos x + 2\cos 2x = 0,$$

$$1 - 2\cos x + 2(2\cos^2 x - 1) = 0,$$

$$2\cos^2 x - \cos x - \tfrac{1}{2} = 0,$$

$$\cos^2 x - \tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{4} = 0.,$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4},$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \text{arc cos}\,\frac{1+\sqrt{5}}{4} = 36^0 \\ \text{und } x &= \text{arc cos}\,\frac{1-\sqrt{5}}{4} = 108^0 \end{aligned}\right\} (20).$$

230) Den Winke zu bestimmen, dessen Cosinus gleich dessen Tangente ist.

Bezeichnet x diesen Winkel, so ist

$$\cos x = \text{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\cos^2 x = \sin x$$

$$1 - \sin^2 x = \sin x$$

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

wo offenbar nur der positive Wurzelwerth zu nehmen ist, weil sonst der Sinus die Einheit überschritte. Es ist somit

$$x = \text{arc sin}\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

231) Wenn

$$2\cos\theta = u + \frac{1}{u}$$

gesetzt wird, so ist

$$2\cos 2\theta = u^2 + \frac{1}{u^2}$$

$$2\cos 3\theta = u^3 + \frac{1}{u^3}$$

und ganz allgemein

$$2\cos n\theta = u^n + \frac{1}{u^n}.$$

1. Beweis. Man nehme an, es wäre

$$2 \cos (m - 1)\, \theta = u^{m-1} + \frac{1}{u^{m-1}}$$

$$\text{und } 2 \cos m\theta = u^m + \frac{1}{u^m},$$

und suche zu beweisen, daß dann auch

$$2 \cos (m + 1)\, \theta = u^{m+1} + \frac{1}{u^{m+1}}$$

sein müsse.

Es ist

$$\cos (A + B) + \cos (A - B) = 2 \cos A \cos B \quad (25),$$

folglich, wenn man

$$A = m\theta \text{ und } B = \theta$$

setzt,

$$\cos (m + 1)\, \theta + \cos (m - 1)\, \theta = 2 \cos m\theta \cos \theta$$

mithin

$$\cos (m + 1)\, \theta = \left(u^m + \frac{1}{u^m}\right) \left(u + \frac{1}{u}\right) \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$- \left(u^{m-1} + \frac{1}{u^{m-1}}\right) \cdot \tfrac{1}{2},$$

folglich

$$2 \cos (m + 1)\, \theta = u^{m+1} + \frac{1}{u^{m+1}} + u^{m-1} + \frac{1}{u^{m-1}}$$

$$- u^{m-1} - \frac{1}{u^{m-1}}$$

$$= u^{m+1} + \frac{1}{u^{m+1}}.$$

Nun ist

$$2 \cos 2\theta = 2\,(2 \cos^2 \theta - 1) \quad (42)$$

$$= 4 \cos^2 \theta - 2$$

$$= u^2 + 2 + \frac{1}{u^2} - 2$$

$$= u^2 + \frac{1}{u^2}$$

und $2 \cos \theta = u + \frac{1}{u}$

nach der Annahme, folglich nach dem Schlusse von n auf $n + 1$,

$$2 \cos 3\,\theta = u^3 + \frac{1}{u^3}$$

und allgemein

$$2 \cos n\theta = u^n + \frac{1}{u^n},$$

wenn n eine ganze Zahl bezeichnet.

2. Beweis. Aus der Gleichung

$$2 \cos \theta = u + \frac{1}{u}$$

erhält man

$$u^2 - 2\,u \cos \theta + 1 = 0,$$

$$u = \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - 1}$$

$$= \cos \theta + \sqrt{-1}\,.\,\sin \theta,$$

oder wenn $\sqrt{-1} = i$ gesetzt wird,

$$u = \cos \theta + i \sin \theta \;\ldots\; (\alpha),$$

mithin

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

oder $$\frac{1}{u} = \cos \theta - i \sin \theta \;\ldots\; (\beta).$$

Aus (α) erhält man

$$u^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$= \cos n\theta + i \sin n\theta \;(67)$$

und aus (β) nach demselben Satze

$$\frac{1}{u^n} = (\cos \theta - i \sin \theta)^n$$

$$= \cos n\theta - i \sin n\theta,$$

folglich

$$u^n + \frac{1}{u^n} = 2 \cos n\theta$$

$$\text{und } u^n - \frac{1}{u^n} = 2\, i \sin n\theta,$$

wo n jede beliebige Zahl bezeichnen kann.

232) Wenn durch A die Summe der Tangenten einer Anzahl von Kreisbögen, durch B die Summe der Produkte von je zweien dieser Tangenten, durch C die Summe der Produkte von je dreien derselben bezeichnet werden, so ist die Tangente der Summe aller Bögen gleich dem Ausdrucke

$$\frac{A - C + E - G + etc.}{1 - B + D - F + etc.}$$

Es ist

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$
$$= \cos a \cos b + i (\sin a \cos b + \cos a \sin b)$$
$$- \sin a \sin b$$
$$= \cos (a + b) + i \sin (a + b)$$

und entsprechend

$$[\cos (a + b) + i \sin (a + b)] (\cos c + i \sin c)$$
$$= \cos (a + b + c) + i \sin (a + b + c),$$

mithin ist

$$\cos (a + b + c + \ldots) + i \sin (a + b + c + \ldots)$$
$$= (\cos a + i \sin a)$$
$$\times (\cos b + i \sin b)$$
$$\times (\cos c + i \sin c)$$
$$\times \ldots$$

Wird die linke Seite durch

$$\cos (a + b + c + \ldots)$$

dividirt und multiplicirt und beide Seiten mit

$$\cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c \,.\, etc.$$

multiplicirt, so erhält man

$$\frac{\cos(a+b+c+\ldots)}{\cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c \ldots}\left[1 + i \,.\, \frac{\sin(a+b+c+\ldots)}{\cos(a+b+c+\ldots)}\right]$$

$$= (1 + i \operatorname{tg} a)$$

$$\times (1 + i \operatorname{tg} b)$$

$$\times (1 + i \operatorname{tg} c)$$

$$\times \; etc.$$

$$= 1 + iA + i^2 B + i^3 C + \ldots{}^{*)},$$

mithin

$$\frac{\cos(a+b+c\ldots)}{\cos a . \cos b . \cos c \ldots} + i \operatorname{tg}(a+b+c+\ldots) \,.\, \frac{\cos(a+b+c+\ldots)}{\cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c \ldots}$$

$$= 1 - B + D - F + \ldots + i(A - C + E \ldots)$$

Setzt man die reellen und die imaginären Werthe einander bezüglich gleich, so erhält man

$$\frac{\cos(a+b+c+\ldots)}{\cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c. \ldots} = 1 - B + D - F + \ldots)$$

und

$$\operatorname{tg}(a+b+c+\ldots) \,.\, (1 - B + D - F + \ldots) = A - C + E - G + \ldots$$

oder

$$\operatorname{tg}(a+b+c+\ldots) = \frac{A - C + E - G + \ldots}{1 - B + D - F + \ldots}.$$

Zusatz. Es ist

$$tg\, n\theta = \frac{n\, tg\,\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} tg^3\,\theta + etc.}{1 - \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} tg^2\,\theta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} tg^4\,\theta - etc.}$$

---

*) S. mein Lehrb. der algebraischen Analysis, §. 22.

Setzt man im vorigen Satze

$$a = b = c = d = etc. = \theta$$

so erhält man

$$\operatorname{tg} n\theta = \frac{n \operatorname{tg}\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \operatorname{tg}^3 \theta + \ldots}{1 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \operatorname{tg}^2 \theta + \ldots}$$

(Vergl. mein Lehrb. der algebr. Analysis, §. 23.)

233) Ein gleichförmiger Balken von der Länge a und der Schwere W lehnt mit dem einen Ende an einer Mauer, am unteren Ende ist eine Schnur befestigt, welche über eine oben auf der Mauer befindliche feste Rolle geht und an welcher ein Gewicht P hängt. Wenn l die Länge der Schnur vom unteren Ende des Balkens bis zur Rolle, φ der Neigungswinkel des Balkens gegen den Horizont und h die senkrechte Höhe der Rolle über dem unteren Ende des Balkens ist, so soll die Neigung der Schnur gegen den Balken bei vorhandenem Gleichgewichte gefunden werden.

Es sei AB (Fig. 57) der Balken, welcher an der Mauer CD lehnt, G sei dessen Mittelpunkt, in welchem wir uns die Schwere W parallel mit CD als wirkend vorstellen, und C die feste Rolle. Zieht man $AD \perp CD$, dann ist $AB = a$, $CD = h$, $AC = l$ und $BAD = \varphi$.

Setzt man noch

$$BC = k,\ AD = m,\ BAC = \theta$$
$$\text{und } BCA = \psi$$

so ist

$$\theta + \varphi + \psi = \frac{\pi}{2} \ldots (\alpha),$$

$$k = h - a \sin \varphi \ldots (\beta),$$

$$m = a \cos \varphi \ . \ . \ (\gamma),$$

$$\frac{k}{\sin\theta} = \frac{l}{\cos\varphi} \ldots (\delta)$$

$$\cot\psi = \frac{h}{m} = \operatorname{tg}(\theta + \varphi) \ldots (\varepsilon),$$

folglich

$$\frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi} = \frac{h}{m},$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h - m\operatorname{tg}\varphi}{m + h\operatorname{tg}\varphi}$$

oder wegen (γ)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h - a\sin\varphi}{a\cos\varphi + h\operatorname{tg}\varphi}$$

und wegen (β)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k}{a\cos\varphi + h\operatorname{tg}\varphi} \ldots (\zeta).$$

Ist nun AB im Gleichgewichte für B als Unterstützungspunkt, so müssen bei dem dadurch gebildeten einarmigen Hebel die statischen Momente gleich sein. Man hat somit

$$P a \sin\theta = \tfrac{1}{2} \,.\, W \,.\, a\cos\varphi \ldots (\eta).$$

Durch Verbindung von (η) mit (δ) erhält man

$$2P \,.\, k = W \,.\, l$$

$$k = \frac{W \,.\, l}{2P} \ldots (\vartheta).$$

Setzt man (ϑ) in (ζ) ein, so erhält man endlich

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{W \,.\, l}{2P \,.\, (a\cos\varphi + h\operatorname{tg}\varphi)}.$$

Befindet sich der Balken in der Lage AB', unter der Voraussetzung, daß B' vor dem Herabgleiten geschützt ist, so erhält man, wenn $\varphi = B'AD$, $\theta = CAB'$ und h die Höhe der Rolle über dem oberen Ende des Balkens ist, auf ähnliche Weise

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{W \,.\, l}{2P(a\cos\varphi - h\operatorname{tg}\varphi)}.$$

Die allgemeine Lösung des Problems wird also ausgedrückt durch

$$\theta = \text{arc tg} \frac{W \,.\, l}{2\,P\,(a \cos\varphi \pm h \,\text{tg}\,\varphi)}.$$

234) Wenn man von einem Punkte in der Ebene eines Dreiecks Lothe auf die drei Seiten fällt und die Fußpunkte derselben verbindet, so findet, wenn $\triangle'$ das dadurch gebildete Dreieck, $\triangle$ das durch die Halbirungspunkte der Seiten bestimmte, R den Radius des um letzteres beschriebenen Kreises und R' den Abstand des angenommenen Punktes vom Mittelpunkte des genannten Kreises bezeichnet, folgende Relation statt:

$$\frac{\triangle'}{\triangle} = \pm \frac{R^2 - R'^2}{R^2},$$

wo (+) oder (—) zu nehmen ist, je nachdem der angenommene Punkt innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt.

Es sei O (Fig. 58) der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, OD, OE, OF die auf den Seiten in deren Mittelpunkten senkrecht stehenden Lothe und DEF das durch die Fußpunkte derselben bestimmte Dreieck.

Es sei ferner P der angenommene Punkt und QRS das durch die Fußpunkte der von ihm auf die Seiten gefällten Lothe bestimmte Dreieck. Zieht man PO und verlängert diese Linie bis zum Durchschnitte mit den Dreiecksseiten in G, H, J, so hat man, wenn $PGC = \theta$ gesetzt wird:

$$OD = R \cos A,$$

$$OE = R \cos B,$$

$$OF = R \cos C,$$

$$PQ = OD + OP \sin\theta = R \cos A + R' \sin\theta,$$

$$PR = OE - OP \sin(\theta + C) = R \cos B - R' \sin(\theta + C),$$

$$PS = OF - OP \sin(\theta - B) = R \cos C - R' \sin(\theta - B),$$

wo θ, $\theta + C$, $\theta - B$ die Winkel (oder deren Supplemente) bezeichnen, welche die Linie PO bei nöthiger Verlängerung mit den Seiten des Dreiecks macht.

Nun ist

$$2\triangle = OD\,.\,OE\,.\sin C + OE\,.\,OF\,.\sin A + OF\,.\,OD\,.\sin B\,(57)$$
$$= R^2\,(\cos A \cos B \sin C + \cos B \cos C \sin A + \cos C \cos A \sin B)$$

und deshalb

$$2\triangle' = PQ\,.\,PR \sin C + PR\,.\,PS \sin A + PS\,.\,PQ \sin B$$
$$= 2\triangle + \left\{\begin{matrix} \sin\theta \cos B \sin C - \sin(\theta + C)\cos A \sin C \\ - \sin(\theta - B)\cos A \sin B + \\ \sin\theta \sin B \cos C - \sin(\theta + C)\sin A \cos C \\ - \sin(\theta - B)\sin A \cos B \end{matrix}\right\} RR'$$
$$- [\sin\theta \sin C \sin(\theta + C) + \sin\theta \sin B \sin(\theta - B) - \sin A \sin(\theta + C)\sin(\theta - B)]\,R'^2.$$

Der Coeffizient von RR' ist aber gleich Null, denn addirt man das erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste Glied desselben, so erhält man

$$\sin\theta \sin(B + C) - \sin(\theta + C)\sin B - \sin(\theta - B)\sin C = 0.$$

Der Coeffizient von R'^2 hingegen läßt sich in den Ausdruck

$$\sin A \sin B \sin C$$

verwandeln. Es ist nämlich

$$\sin\theta \sin C \sin(\theta + C) = \sin^2\theta \sin C \cos C + \sin\theta \cos\theta \sin^2 C;$$
$$\sin\theta \sin B \sin(\theta - B) = \sin^2\theta \sin B \cos B - \sin\theta \cos\theta \sin^2 B,$$
$$\sin A \sin(\theta + C)\sin(\theta - B) = \sin^2\theta \cos B \cos C \sin A + \sin\theta \cos\theta \cos B \sin C \sin A + \sin^2\theta \sin B \sin C \sin A - \sin\theta \cos\theta \sin B \cos C \sin A - \sin A \sin B \sin C,$$

somit ist der Coeffizient von R'^2

$$\sin\theta \sin C \sin(\theta + C) + \sin\theta \sin B \sin(\theta - B) - \sin A \sin(\theta + C)\sin(\theta - B)$$
$$= \sin A \sin B \sin C$$

$$+ \sin^2\theta\,[\sin C\cos C + \sin B\cos B - \sin A\cos(B-C)]$$
$$+ \sin\theta\cos\theta\,[\sin^2 C - \sin^2 B + \sin A\sin(B-C)]$$
$$= \sin A\sin B\sin C$$
$$+ \sin^2\theta\,[\tfrac{1}{2}\sin 2C + \tfrac{1}{2}\sin 2B - \sin(B+C)\cos(B-C)]$$
$$+ \sin\theta\cos\theta\,[\sin^2 C - \sin^2 C + \sin(B+C)\sin(B-C)]$$
$$= \sin A\sin B\sin C \text{ (35) und (49):}$$

mithin ist

$$2\triangle' = 2\triangle - R'^2\sin A\sin B\sin C$$

Nun ist

$$R^2\sin A\sin B\sin C = 2\triangle \quad (\text{§. } 99),$$
$$\sin A\sin B\sin C = \frac{2\triangle}{R^2},$$

folglich

$$2\triangle' = 2\triangle - \frac{2\triangle R'^2}{R^2},$$
$$\frac{\triangle'}{\triangle} = \frac{R^2 - R'^2}{R^2}.$$

Liegt P außerhalb des Dreiecks, so erhält man auf ganz ähnliche Weise

$$\frac{\triangle'}{\triangle} = \frac{R'^2 - R^2}{R^2},$$

so daß allgemein

$$\frac{\triangle'}{\triangle} = \pm\frac{R^2 - R'^2}{R^2}$$

ist.

Zusatz. Ist $R' = R$, d. h. wird der Punkt P in der Peripherie des umschriebenen Kreises gewählt, so wird

$$\triangle' = 0,$$

d. h. die Fußpunkte der Lothe fallen in eine gerade Linie.

235) Zieht man von einem der Durchschnittspunkte zweier einander schneidenden Kreise aus in jedem einen Durchmesser und halbirt den von ihnen gebildeten

Winkel; so ist das Rechteck aus den Abständen der Durchmesserendpunkte von der Winkelhalbirenden gleich dem Quadrate des Stücks der beiden Kreisen gemeinschaftlichen Tangente, welches zwischen den Berührungspunkten liegt.

Es sei O (Fig. 59) der eine Durchschnittspunkt zweier Kreise (A) und (B), OAF und OBF' seien die Durchmesser, OP' die Halbirende des Winkels AOB, welche die Peripherieen der Kreise (A) und (B) bezüglich in P und P' trifft, ferner seien D und D' die Berührungspunkte der beiden Kreisen gemeinschaftlichen Tangente, so ist zu zeigen, daß

$$DD'^2 = FP \,.\, F'P'$$

ist. Es ist

$$\left.\begin{aligned} FP &= 2\,R \sin \tfrac{1}{2}\,O, \\ F'P' &= 2\,r \sin \tfrac{1}{2}\,O, \end{aligned}\right\} (63),$$

wenn R und r bezüglich die Radien der Kreise (A) und (B) bezeichnen, mithin ist

$$FP \,.\, F'P' = 4\,Rr \sin^2 \tfrac{1}{2}\,O \ldots (\alpha)$$

Nun ist

$$AB^2 = R^2 + r^2 - 2\,Rr \cos O \;(56) \ldots (\beta),$$

ferner

$$DD'^2 = AB^2 - AQ^2, \text{ oder wegen } (\beta)$$
$$= R^2 + r^2 - 2\,Rr \cos O - R^2 - r^2 + 2\,Rr$$
$$= 2\,Rr\,(1 - \cos O)$$
$$DD'^2 = 4\,Rr \sin^2 \tfrac{1}{2}\,O \ldots (\gamma).$$

Aus (α) und (β) folgt aber

$$DD'^2 = FP \,.\, F'P'.$$

236) Sind a, d, b, c vier harmonische Strahlen, so ist

$$\sin(ad)\,\sin(bc) = \sin(db)\,\sin(ac).$$

Zieht man (Fig. 60) die Transversale AN, ferner $p \perp AN$, $a\delta \perp MD$ und $A\delta' \perp MD$, so ist

$$\triangle\, MED \backsim \triangle\, AD\delta',$$

folglich

$$p : d = A\delta' : AD$$

oder $p \,.\, AD = d \,.\, A\delta' \ldots (I)$,

ferner $A\delta' : a = \alpha\delta : M\alpha$

oder $A\delta' = a \,.\, \frac{\alpha\delta}{M\alpha}$

oder $A\delta' = a \sin (ad) \ldots (II)$.

Die Verbindung von (I) und (II) giebt

$$p \,.\, AD = d \,.\, a \,.\, \sin (ad)$$

oder (1) $\frac{AD}{\sin (ad)} = \frac{ad}{p}$, und analog

(2) $\frac{AC}{\sin (ac)} = \frac{ac}{p}$,

(3) $\frac{AB}{\sin (ab)} = \frac{ab}{p}$,

(4) $\frac{BC}{\sin (bc)} = \frac{bc}{p}$,

(5) $\frac{BD}{\sin (bd)} = \frac{bd}{p}$,

(6) $\frac{CD}{\sin (cd)} = \frac{cd}{p}$.

Aus (1) und (5) ergiebt sich

$$\frac{AD}{\sin (ad)} : \frac{BD}{\sin (bd)} = a : b \ldots (III)$$

und aus (2) und (4)

$$\frac{AC}{\sin (ac)} : \frac{BD}{\sin (bc)} = a : b \ldots (IV),$$

und endlich aus (III) und (IV)

$$\frac{AD}{\sin (ad)} : \frac{BD}{\sin (bd)} = \frac{AC}{\sin (ac)} : \frac{BC}{\sin (bc)}$$

oder $\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC} = \frac{\sin (ad)}{\sin (bc)} : \frac{\sin (ac)}{\sin (bc)}$,

eine Gleichung die für vier ganz beliebige Strahlen gilt. Sind nun die Strahlen harmonisch-zugeordnete, so ist

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}\text{*)},$$

folglich ist auch

$$\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = \frac{\sin(ac)}{\sin bc},$$

oder $\sin(ad)\sin(bc) = \sin(bd)\sin ac$).

237) Sind a und b die beiden äußeren Winkel und c der mittlere eines harmonischen Strahlenbüschels, so ist

I. $\cos(a + c)\cos(b + c) = \cos(a + b)$,

II. $tg\,D\; tg\,c - tg\,a\; tg\,b = 2\,tg\,a\; tg\,b\; tg\,c\; tg\,D$,

wenn $a + b + c = D$ gesetzt wird.

Nach vorigem Satze ist

$$\sin D \sin c = \sin a \sin b \;\ldots\; (A)$$

ferner ist

$$\cos(a + c)\cos(b + c)$$
$$= (\cos a \cos c - \sin a \sin c)(\cos b \cos c - \sin b \sin c) \quad (22).$$

Wird auf der rechten Seite aus multiplicirt und $+ \sin a \sin b \cos^2 c - \sin a \sin b \cos^2 c$ ergänzt, so erhält man

$$\cos(a + c)\cos(b + c) = \cos a \cos b \cos^2 c - \sin a \cos b \sin c \cos c$$
$$- \cos a \sin b \sin c \cos c + \sin a \sin b \sin^2 c$$
$$+ \sin a \sin b \cos^2 c - \sin a \sin b \cos^2 c$$
$$= \cos(a + b)\cos^2 c - \sin(a + b)\sin c \cos c$$
$$+ \sin a \sin b \quad (22),\ (21)\ \text{u.}\ (2),$$
$$= [\cos(a + b)\cos c - \sin(a + b)\sin c]\cos c + \sin a \sin b$$
$$= \cos D \cos c + \sin a \sin b$$

oder wegen (A)

*) S. mein Lehrb. der Planim. II. Curs. 3. Aufl. §. 63.

$$\cos(a + c)\cos(b + c) = \cos D \cos c + \sin D \sin c$$
$$= \cos(D - c) \quad (22)$$
$$= \cos(a + b) \ldots (B).$$

Aus der Gleichung

$$\cos(D - c) = \cos(a + b)$$

erhält man ferner

$$\cos a \cos b - \cos D \cos c = \sin a \sin b + \sin D \sin c$$
$$= 2 \sin D \sin c \text{ nach } (A),$$

werden nun beide Seiten mit dem Ausdrucke

$$\frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b \cos c \cos D}$$

multiplicirt, so erhält man

$$\frac{\sin a \sin b}{\cos c \cos D} - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \operatorname{tg} D,$$

oder wegen (A)

$$\operatorname{tg} c \operatorname{tg} D - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \operatorname{tg} D.$$

238) Drei hinter einander liegende und eine gerade Linie bildende Strecken von den Längen a, b, c werden von einem Beobachter unter gleichen Winkeln gesehen, es soll die Lage des Auges bestimmt werden.

Es seien (Fig. 19)

$$AD = a,$$
$$DE = b,$$
$$EB = c$$

und es werde

$$ACD = DCE = ECB = \theta,$$
$$AC = x$$
$$\text{und } ADC = \varphi$$

gesetzt, so ist

$$a : x = \sin\theta : \sin\varphi,$$

$$a + b : x = \sin 2\theta : \sin(\varphi - \theta),$$
$$a + b + c : x = \sin 3\theta : \sin(\varphi - 2\theta),$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin\varphi},$$
$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = \frac{a+b+c}{a} \cdot \frac{\sin(\varphi - 2\theta)}{\sin\varphi},$$

woraus nach gehöriger Entwickelung erhalten werden

$$\cot\varphi = \frac{b-a}{b+a} \cdot \cot\theta \ldots (\alpha),$$

$$\text{und } \cot\varphi = \frac{2(b+c-a)\cos^2\theta - (b+c)}{2(a+b+c)\sin\theta\cos\theta}$$

und hieraus

$$2(a+b+c) \cdot \frac{b-a}{b+a} \cdot \cos^2\theta = 2(b+c-a)\cos^2\theta - (b+c),$$
$$b + c = 2\cos^2\theta \left\{(b+c-a) - (a+b+c) \cdot \frac{b-a}{b+a}\right\},$$
$$(a+b)(b+c) = 2\cos^2\theta\,[(b+c-a)(a+b) - (a+b+c)(b-a)]$$
$$= 2\cos^2\theta \,.\, 2ac,$$
$$\cos^2\theta = \frac{(a+b)(b+c)}{4ac},$$
$$\cos\theta = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}},$$

und hieraus

$$\sin\theta = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4ac - (b+c)(a+b}{ac}} \ldots (\beta),$$

folglich

$$\cot\theta = \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{4ac - (a+b)(b+c)}} \ldots (\gamma).$$

Wird dieser Werth in (α) substituirt, so erhält man

$$\cot\varphi = \frac{b-a}{\sqrt{a+b}} \cdot \sqrt{\frac{b+c}{4ac - (a+b)(b+c)}}$$

und hieraus

$$\sin\varphi = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(a+b)(4ac-(a+b)(b+c))}{a(ac-b^2)}} \ldots (\delta).$$

und mithin aus

$$x = a\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}$$

nach Substitution von (β) und (δ),

$$x = a\cdot\sqrt{\frac{(a+b)(4ac-(a+b)(b+c))}{a(ac-b^2)}}\times$$

$$\sqrt{\frac{ac}{4ac-(a+b)(b+c)}}$$

$$= a\cdot\sqrt{\frac{(a+b)c}{ac-b^2}} \ldots (\varepsilon),$$

wodurch die Lage des Auges bestimmt ist.

Beispiel. Gegeben ist:

$$a = 3'$$
$$b = 2'$$
$$c = 8';$$

man hat deshalb

$$I)\ \cos\theta = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(a+b)\ (b+c)}{ac}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5\ .\ 10}{24}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{48}}.$$

$$\begin{array}{rcl}
\log 25 &=& 1{,}3979400 \\
\log 48 &=& 1{,}6812412 \\
\hline
&& 19{,}7166988 - 20 \\
&2)& \overline{\phantom{19{,}7166988 - 20}} \\
\log\cos\theta &=& 9{,}8583494 - 10 \\
\theta &=& 43^0\ 48'\ 21'',\ 6.
\end{array}$$

II) Aus (δ) erhält man nach Substitution der gegebenen Werthe

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{23}{24}}$$

$$\begin{array}{rcl}
\log 23 &=& 1{,}3617078 \\
\log 24 &=& 1{,}3802112 \\
\hline
&& 19{,}9815166 - 20 \\
&2)& \overline{\phantom{19{,}9815166 - 20}} \\
\log\sin\varphi &=& 9{,}9907583 - 10 \\
\varphi &=& 78^0\ 13'\ 18'',\ 4.
\end{array}$$

III) Aus (ε) erhält man

$$x = 3\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{18},$$
$$\log 18 = 1{,}2552725$$
$$2)\overline{\phantom{1{,}2552725}}$$
$$\log x = 0{,}6276362$$
$$x = 4{,}24264.$$

239) In der Peripherie eines Kreises sind zwei Punkte gegeben und von dem einen aus zwei Sehnen gezogen, es soll durch den zweiten Punkt eine dritte Sehne so gezogen werden, daß die nicht an dem zweiten Punkte liegenden Stücke derselben ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Knüpfen wir an Fig. 26 an, so mögen C und B die gegebenen Punkte, CA und CE die von dem einen aus gezogenen Sehnen sein, es soll nun eine dritte Sehne BD so gezogen werden, daß $OQ : QD = n : 1$ ist. Man setze

$$\text{arc } BC = 2\alpha$$
und deshalb $BDC = \alpha$,
ferner $ACE = \beta$
und $BQC = \theta$,

so hat man

$$OQ = QC \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \theta)}$$

$$\text{und } QD = QC \cdot \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\alpha},$$

$$\text{folglich } \frac{OQ}{OD} = n = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta + \theta)\sin(\theta - \alpha)}.$$

Hieraus erhält man

$$\sin(\theta + \beta)\sin(\theta - \alpha) = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{n}.$$

$$\text{oder } \frac{2\sin\alpha \sin\beta}{n} = 2\sin(\theta + \beta)\sin(\theta - \alpha)$$
$$= \cos(\alpha + \beta) - \cos(2\theta + \beta - \alpha) \quad (26),$$

folglich

$$\cos(2\theta + \beta - \alpha) = \cos(\alpha + \beta) - \frac{2 \sin\alpha \sin\beta}{n},$$

woraus θ berechnet werden kann. Ist aber θ bekannt, so ist auch die gesuchte Linie BD gefunden.

Ist $\beta = \alpha$, so ist

$$\cos 2\theta = \cos 2\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{n};$$

und ist gleichzeitig $n = 1$, d. h. sollen die beiden Stücke OQ und QD gleich werden, so ist

$$\cos 2\theta = \cos 2\alpha - \sin 2\alpha$$
$$= \cos(45^0 + 2\alpha)\sqrt{2} \quad (44).$$

240) In dem gleichschenkligen Dreiecke, welches die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen regulären Zehnecks zur Grundlinie und das Centrum zur Spitze hat, bilden die Spitze, der Schwerpunkt, der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises und der Höhendurchschnitt vier harmonische Punkte.

Bezeichnen in dem $\triangle ABC$ (Fig. 61.) dessen Spitze A ist, S den Schwerpunkt, E den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und H den Höhendurchschnitt, so ist zu zeigen, daß für $BAC = 36^0$,

$$AS \,.\, EH = SE \,.\, AH$$

ist. Drückt man die einzelnen Stücke durch die Höhe $AG = h$ und den Winkel an der Grundlinie B aus, so hat man

$$AS = \tfrac{2}{3}\, h,$$

$$EG = BG \,.\, \mathrm{tg}\frac{B}{2}$$

$$= h \cot B \,\mathrm{tg}\frac{B}{2}$$

$$= \frac{h \cos B \sin\frac{B}{2}}{2 \sin\frac{B}{2} \cos^2\frac{B}{2}} \quad (27)$$

$$= \frac{h \cos B}{1 + \cos B} \quad (42);$$

$$HG = BG \,.\, \cot B$$

$$= h \cot^2 B,$$

mithin $CH = EG - HG$

$$= h \left(\frac{\cos B}{1 + \cos B} - \cot^2 B\right)$$

$$= h \left(\frac{\cos B}{1 + \cos B} - \frac{\cos^2 B}{(1 + \cos B)\, 1 - \cos B}\right)$$

$$= \frac{h \cos B}{1 + \cos B} \left\{1 - \frac{\cos B}{1 - \cos B}\right\}$$

$$= \frac{h \cos B}{1 + \cos B} \cdot \frac{1 - 2 \cos B}{1 - \cos B};$$

$$SE = SG - EG$$

$$= \tfrac{1}{3} h - \frac{h \cos B}{1 + \cos B}$$

$$= h \cdot \frac{1 - 2 \cos B}{3\,(1 + \cos B)};$$

$$AH = AG - HG$$

$$= h - h \cot^2 B$$

$$= h \cdot \frac{1 - 2 \cos^2 B}{(1 + \cos B)\,(1 - \cos B)}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$AS \,.\, EH = SE \,.\, AH,$$

so erhält man nach Streichung des gemeinsamen Factors h,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\cos B}{1 + \cos B} \cdot \frac{1 - 2 \cos B}{1 - \cos B} = \frac{1 - 2 \cos B}{3\,(1 + \cos B)} \cdot \frac{1 - 2 \cos^2 B}{(1 + \cos B)(1 - \cos B)},$$

$$2 \cos B = \frac{1 - 2 \cos^2 B}{1 + \cos B},$$

$$2 \cos B + 2 \cos^2 B = 1 - 2 \cos^2 B,$$

$$4 \cos^2 B + 2 \cos B = 1,$$

$$\cos^2 B + \tfrac{1}{2} \cos B - \tfrac{1}{4} = 0,$$

$$\cos B = \tfrac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) = 72^0 \quad (20),$$

folglich $BAC = 36^0$.

Druck von Philipp Reclam jun. in Leipzig.

Fig. 1.

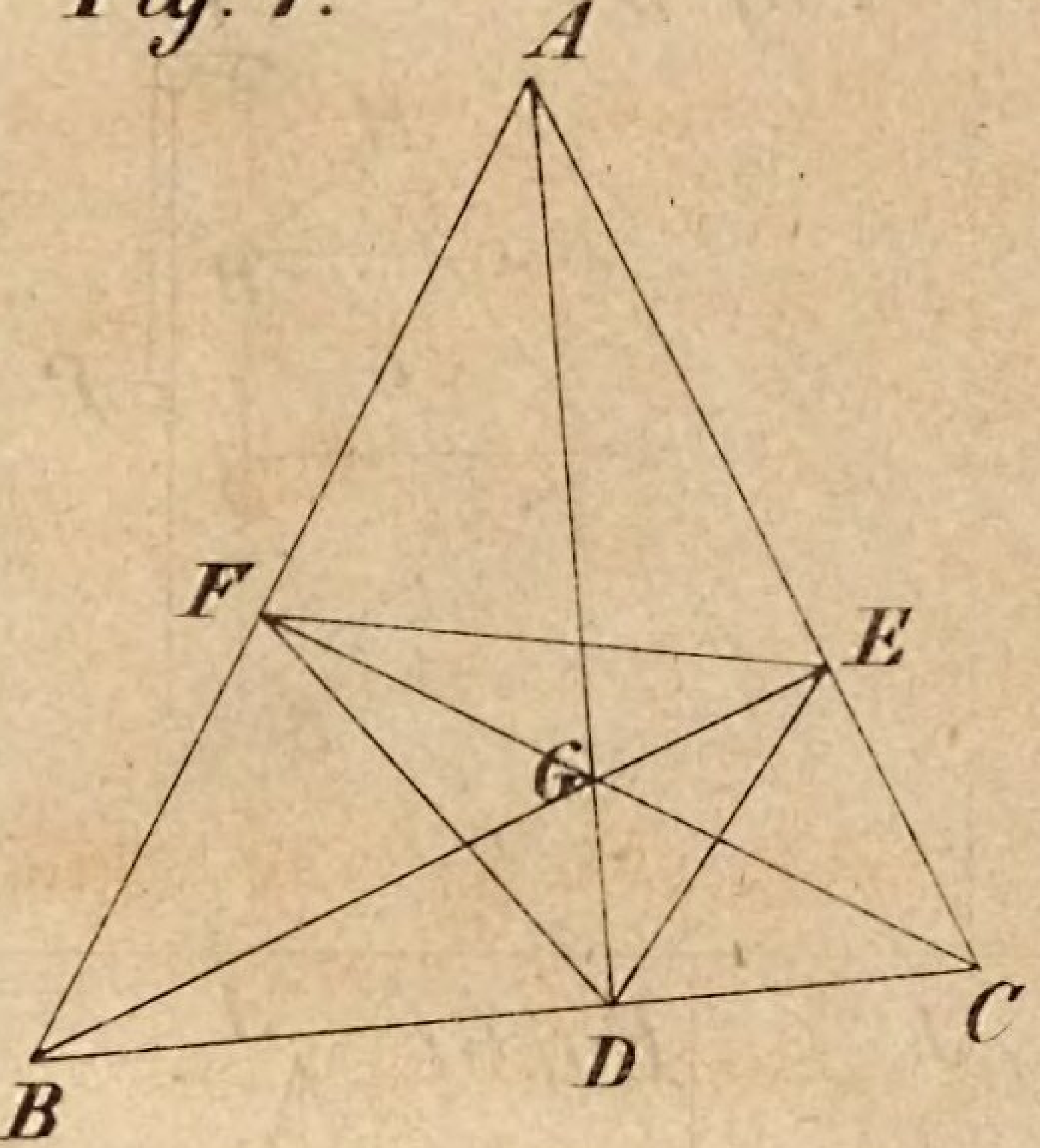


Fig. 2.

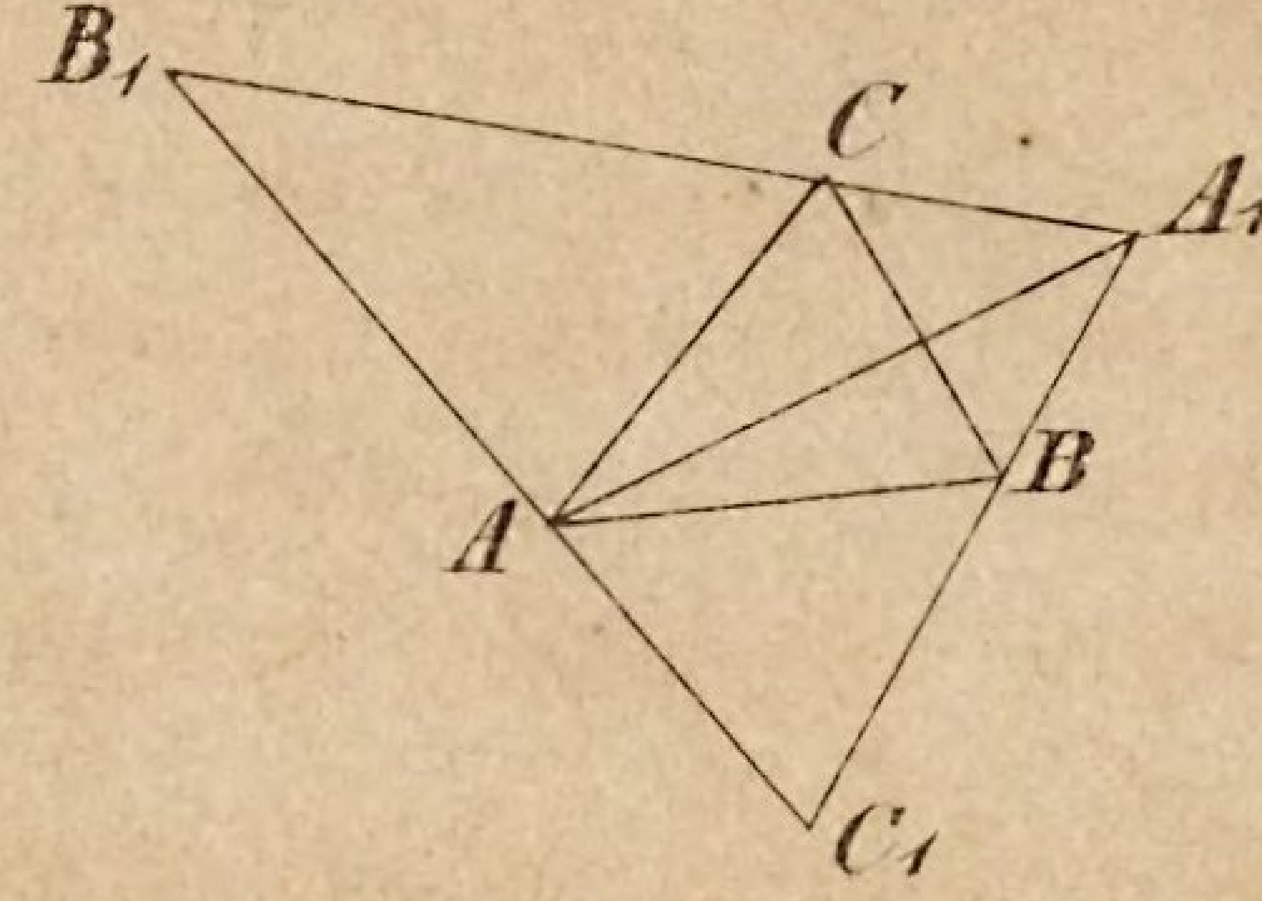


Fig. 3.

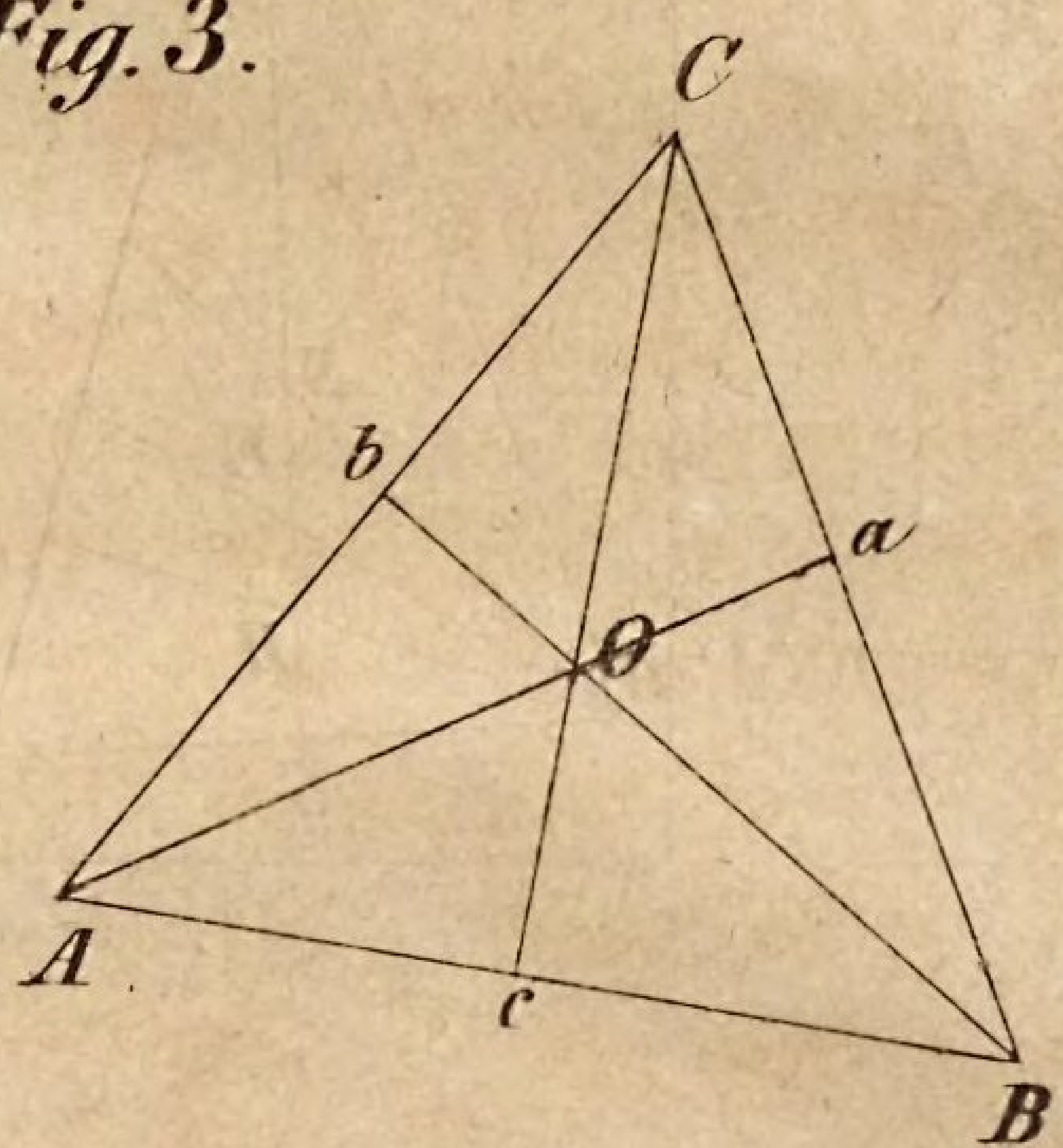


Fig. 4.

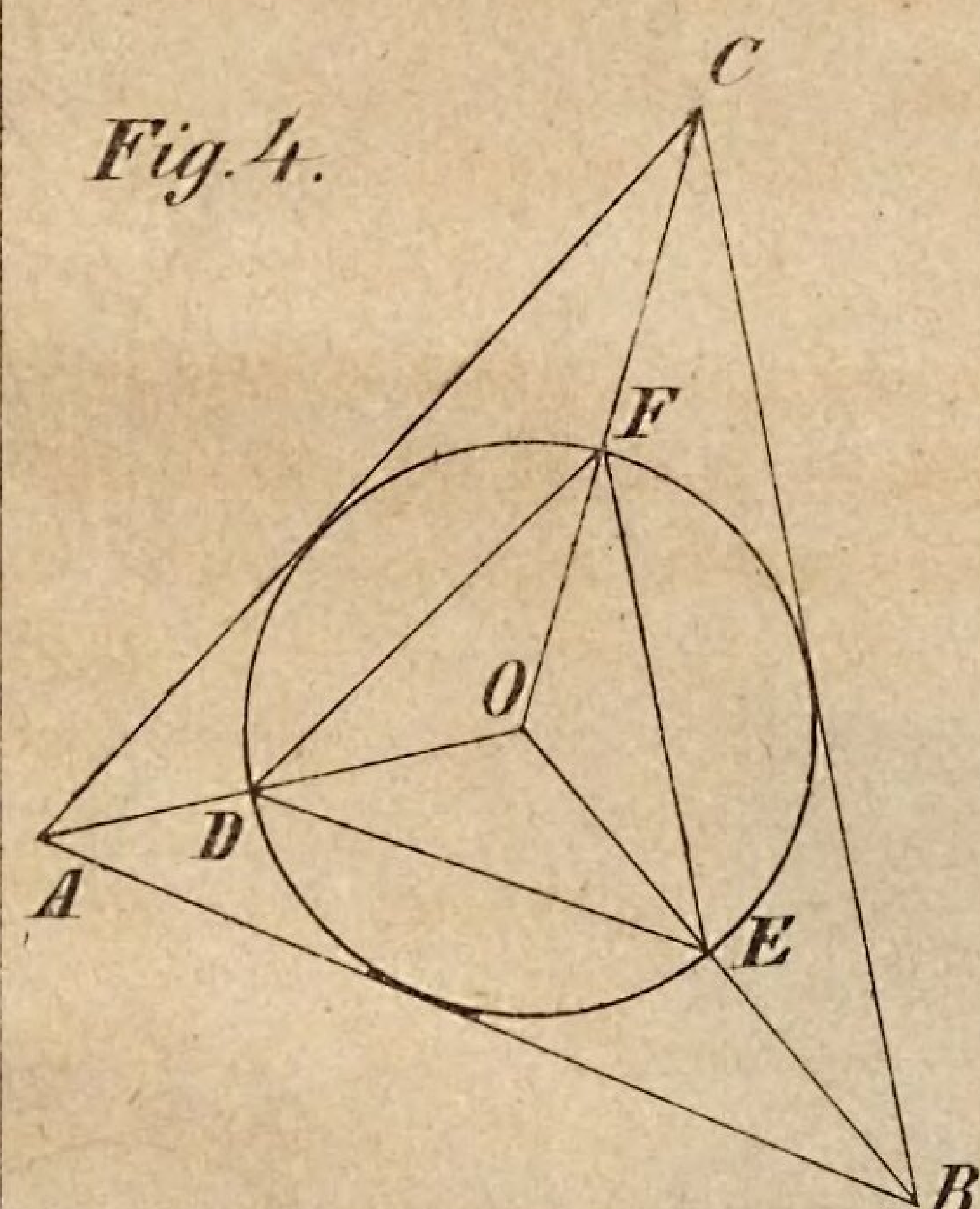


Fig. 5.

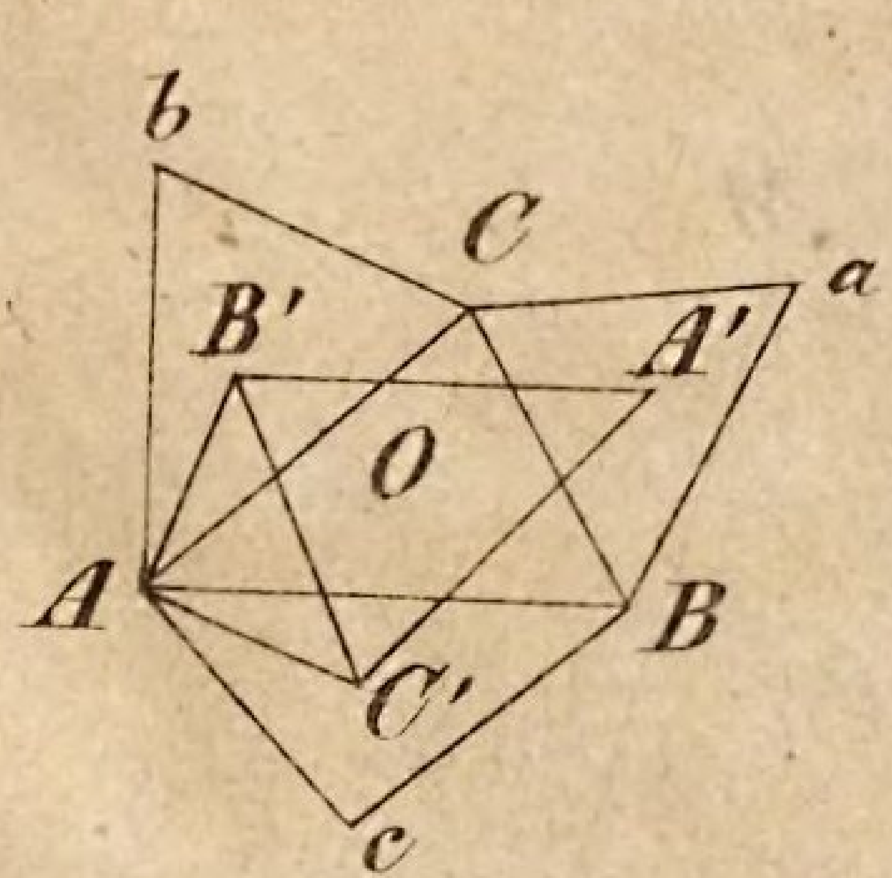


Fig. 6.

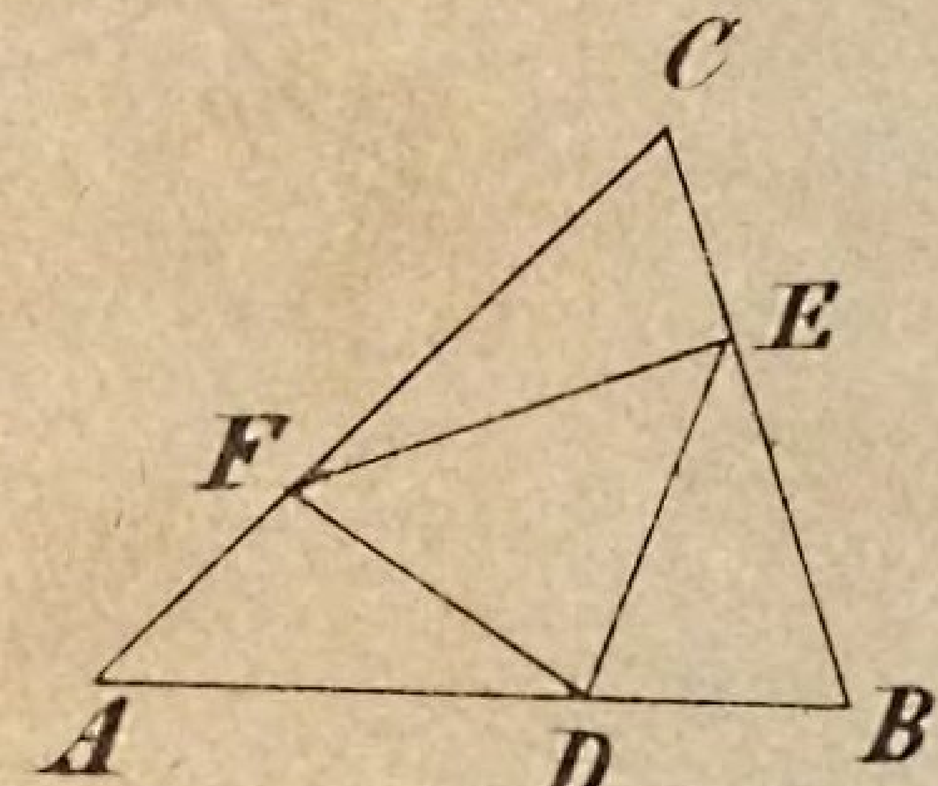


Fig. 7.

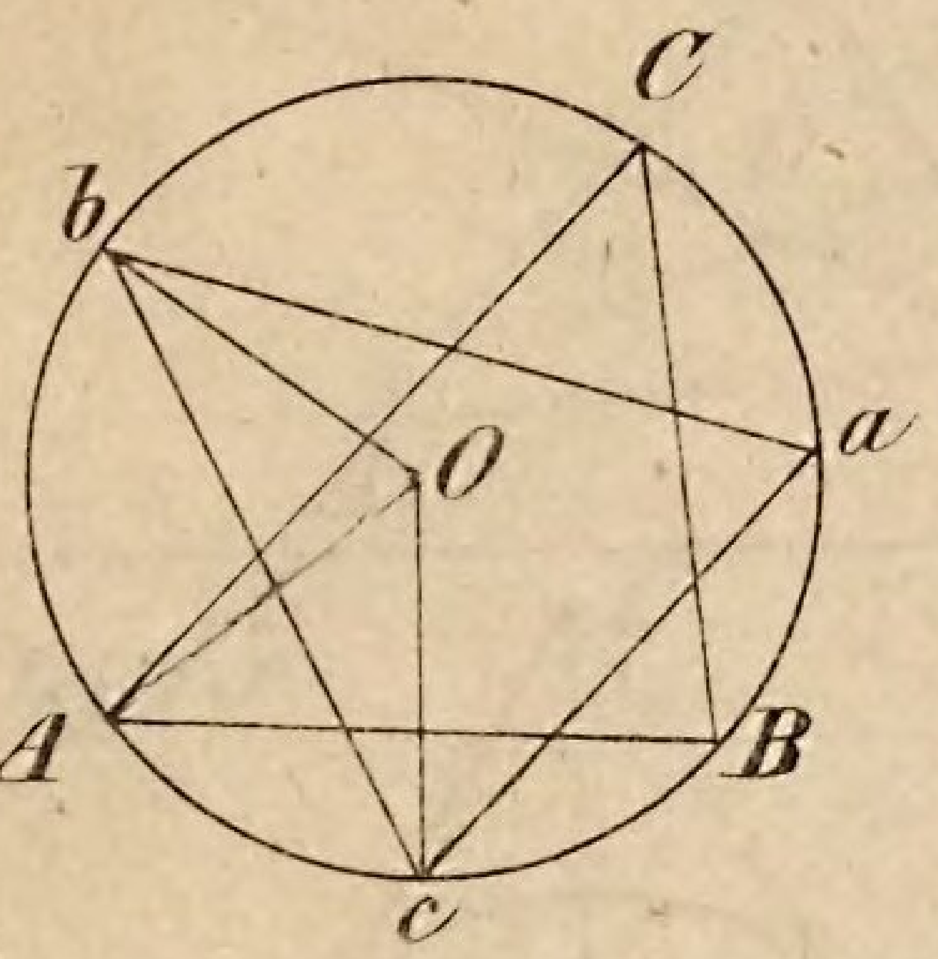


Fig. 8.

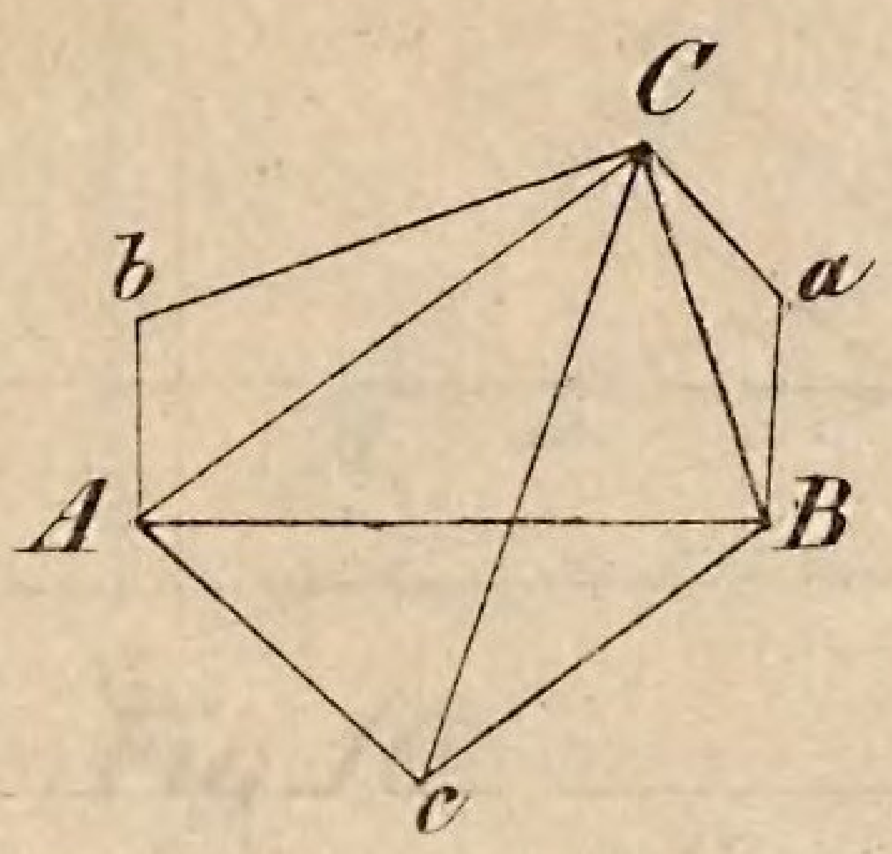


Fig. 9.

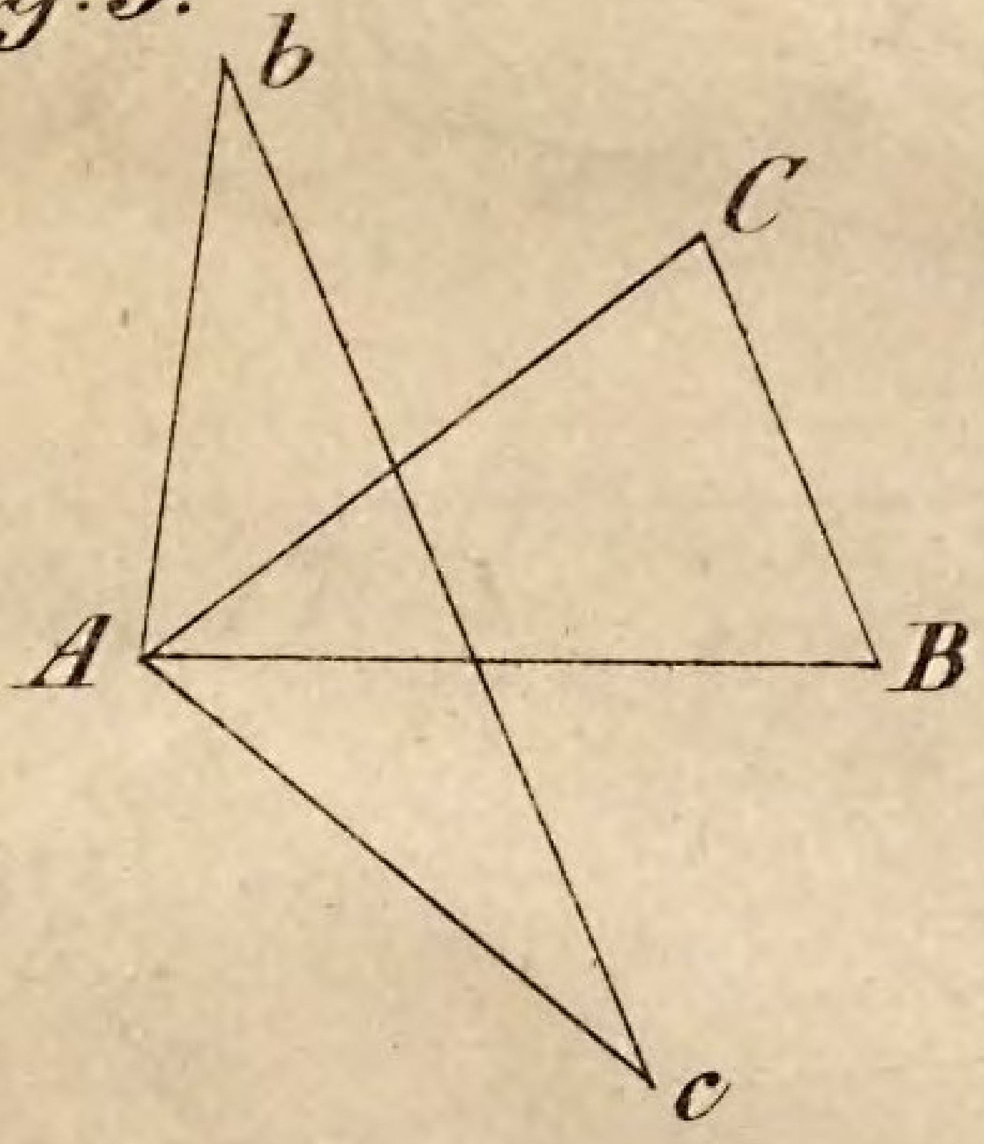


Fig. 10.

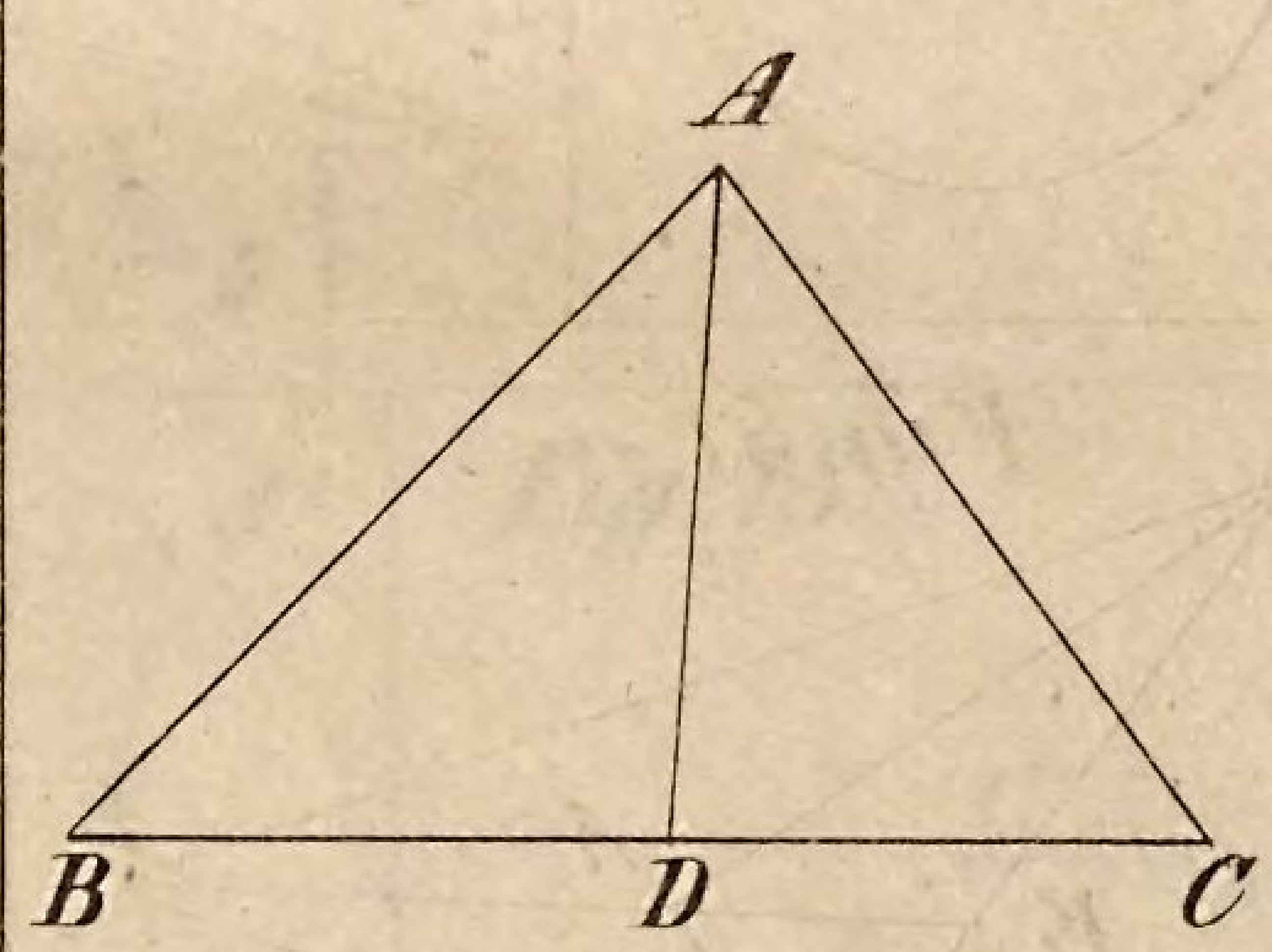


Fig. 11.

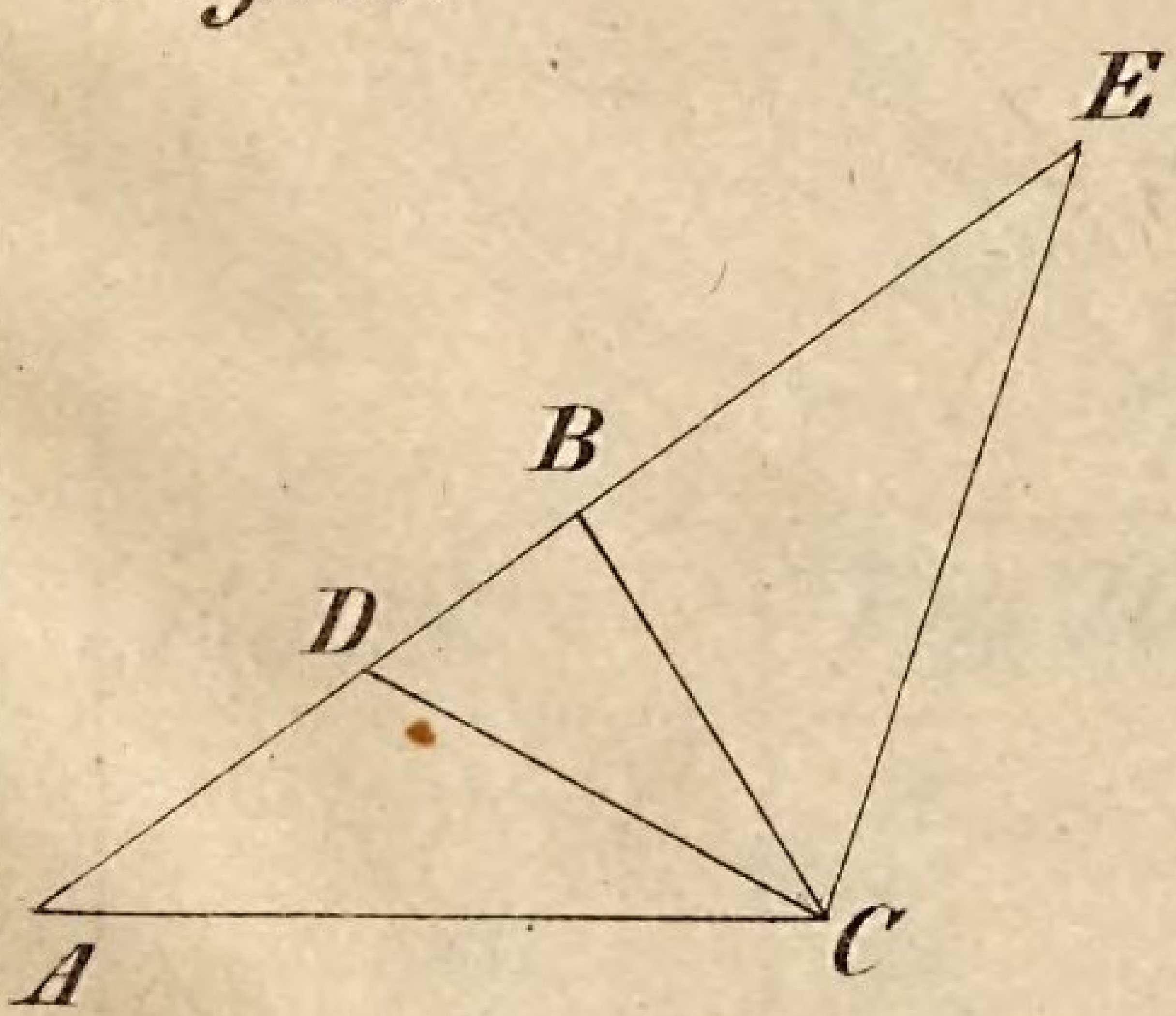


Fig. 12.

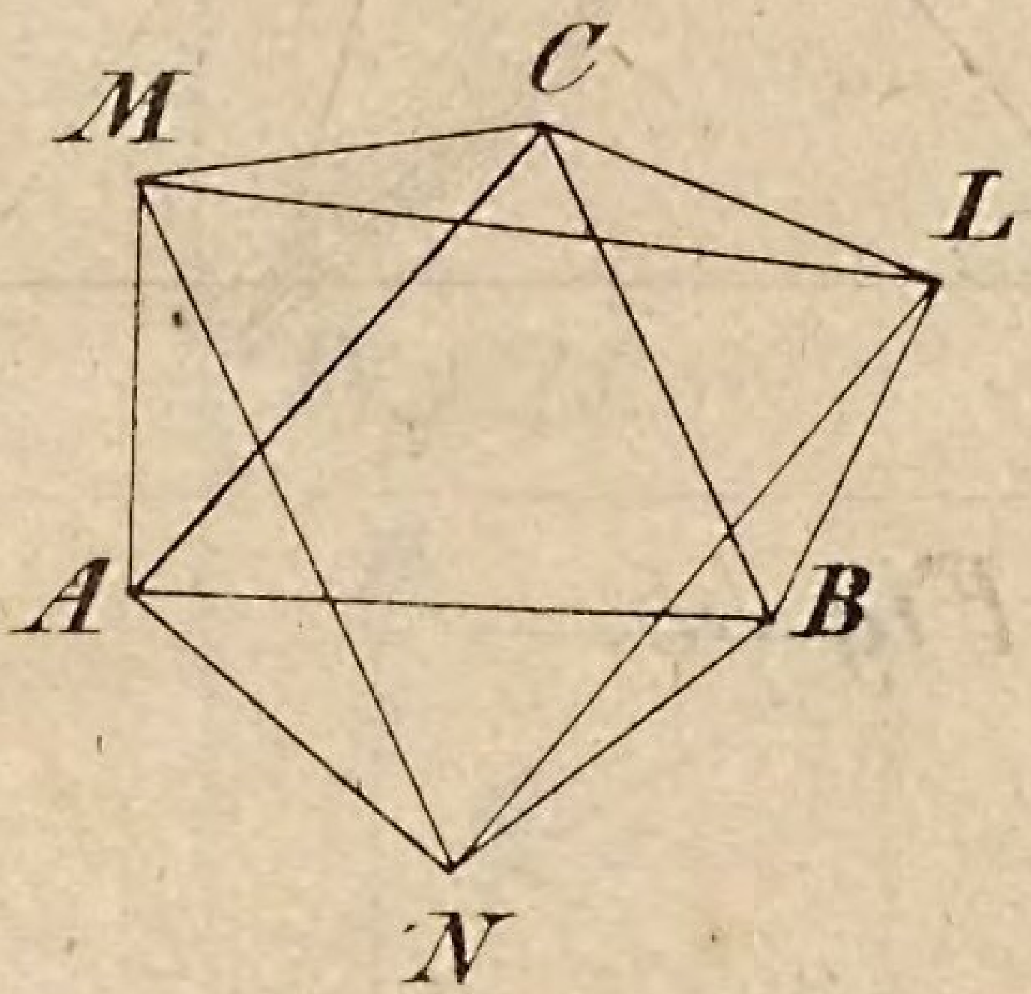


Fig. 13.

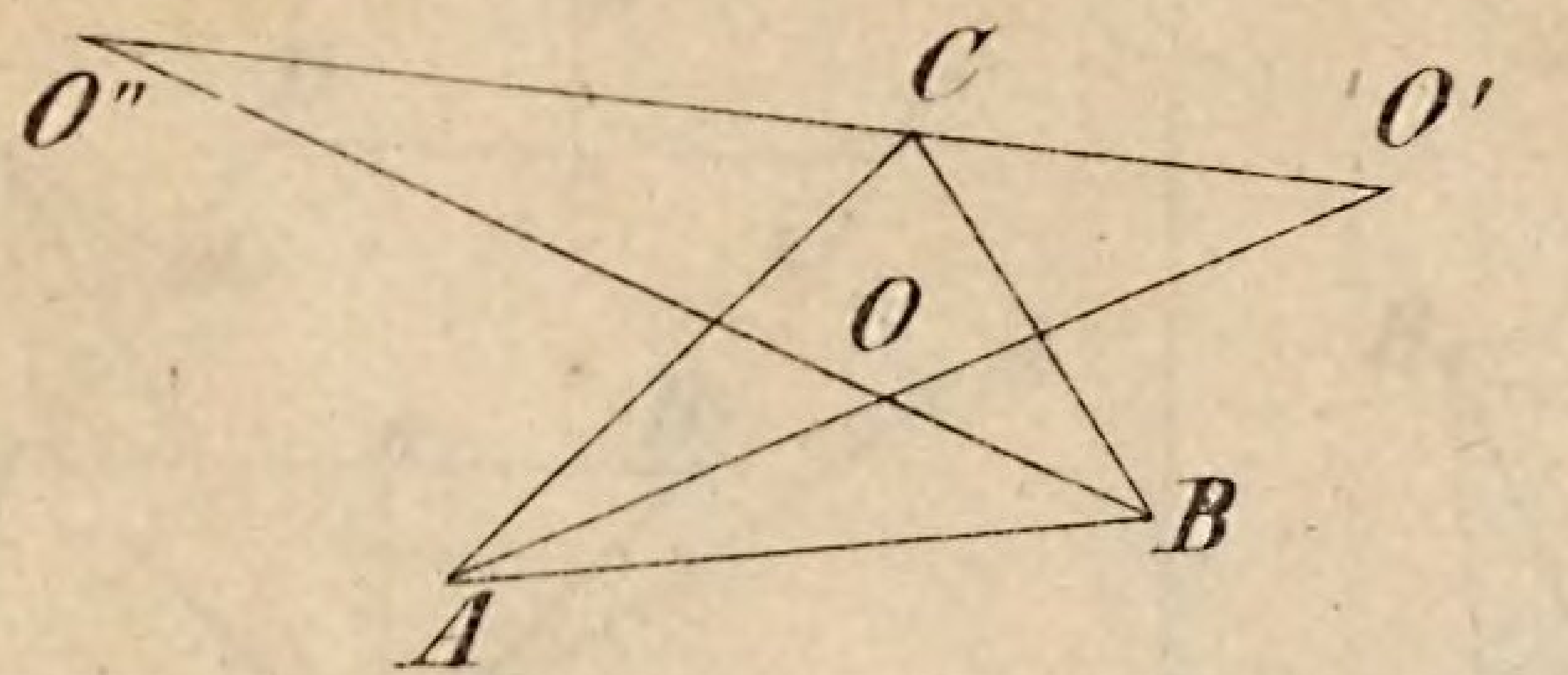


Fig. 14.

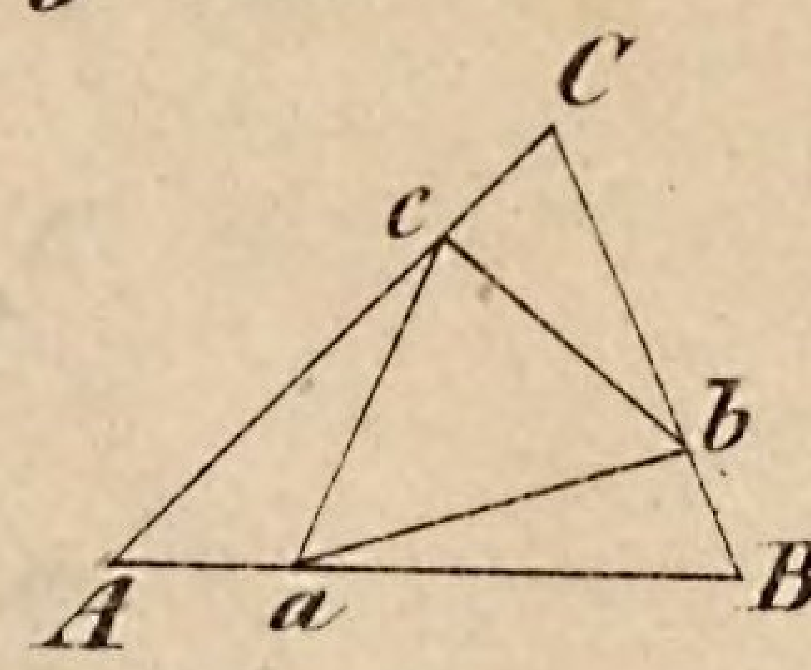


Fig. 15.

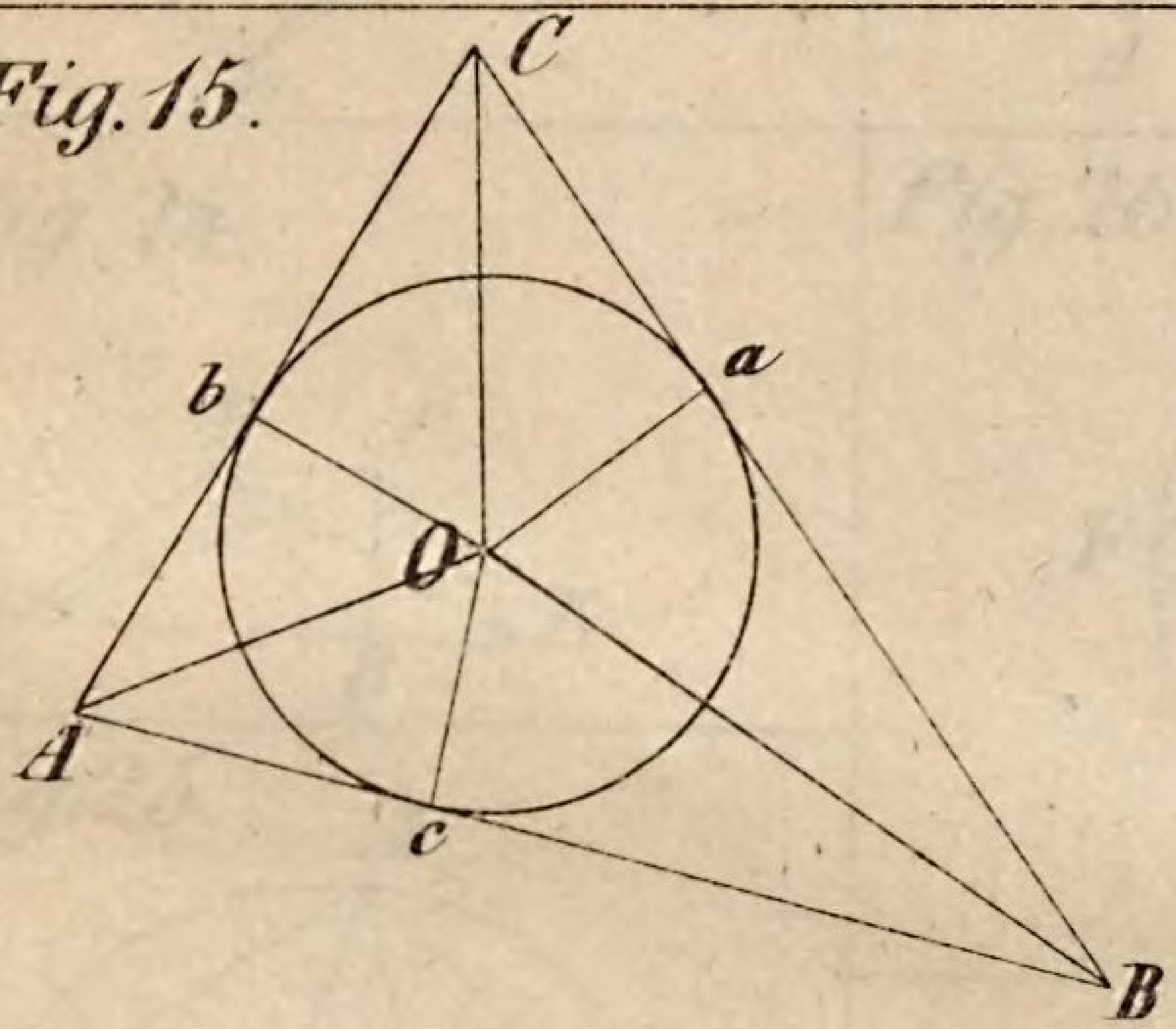


Fig. 16.

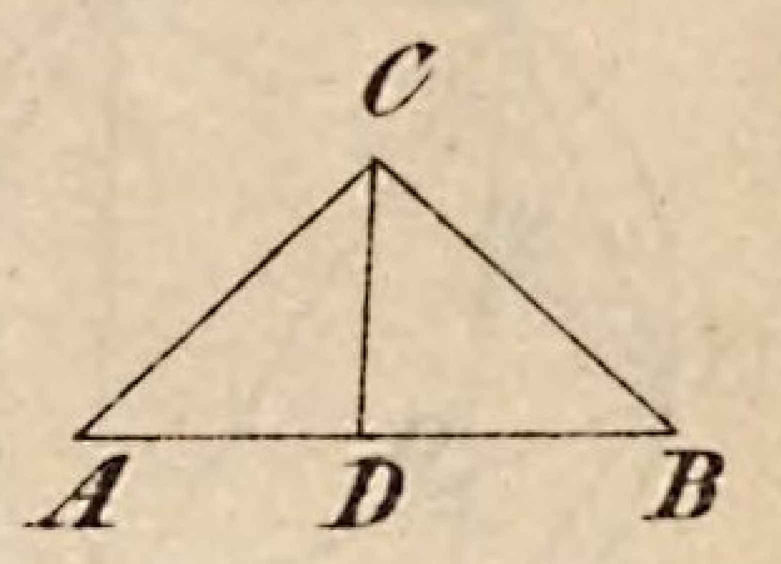


Fig. 17.

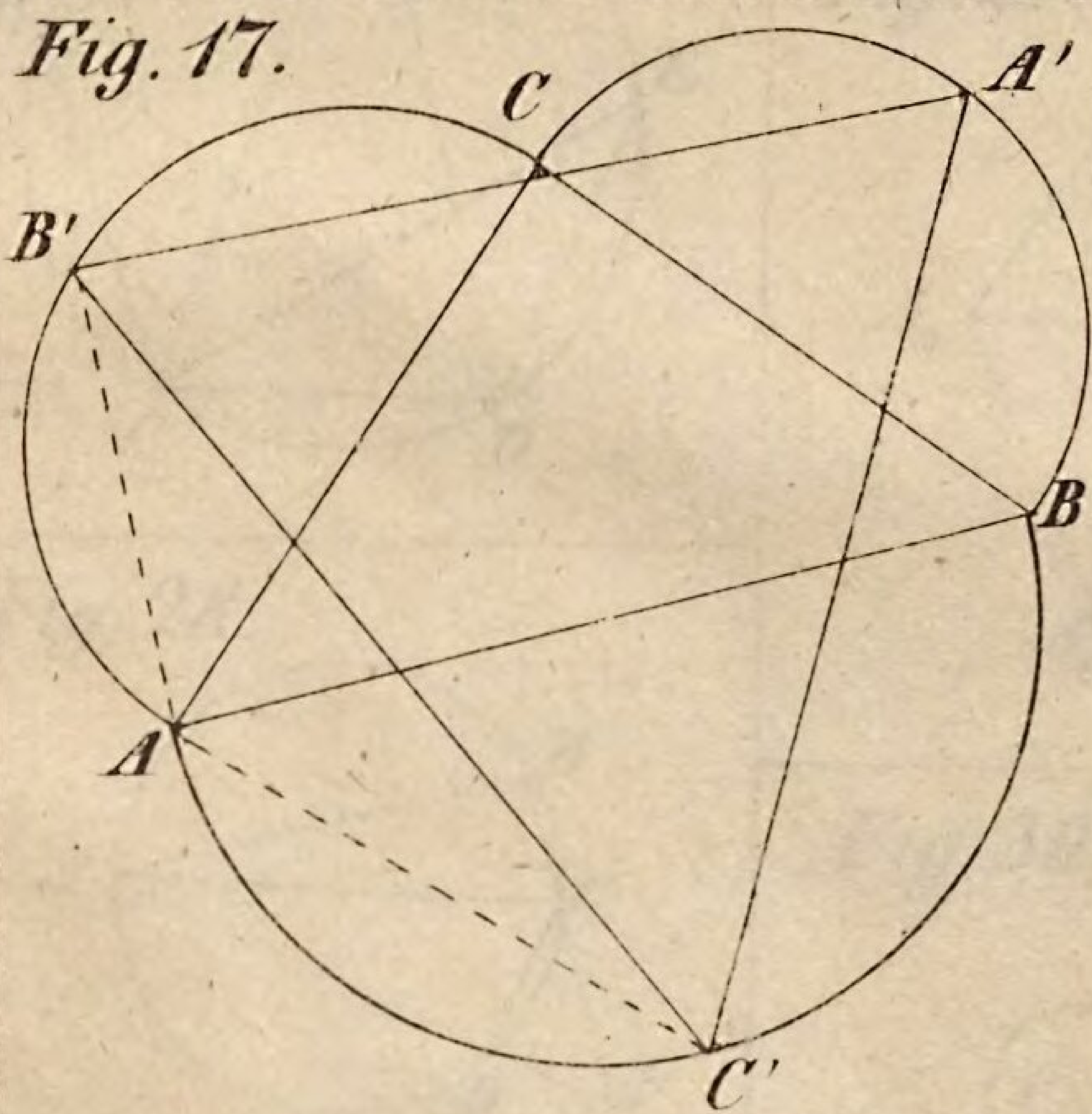


Fig. 18.

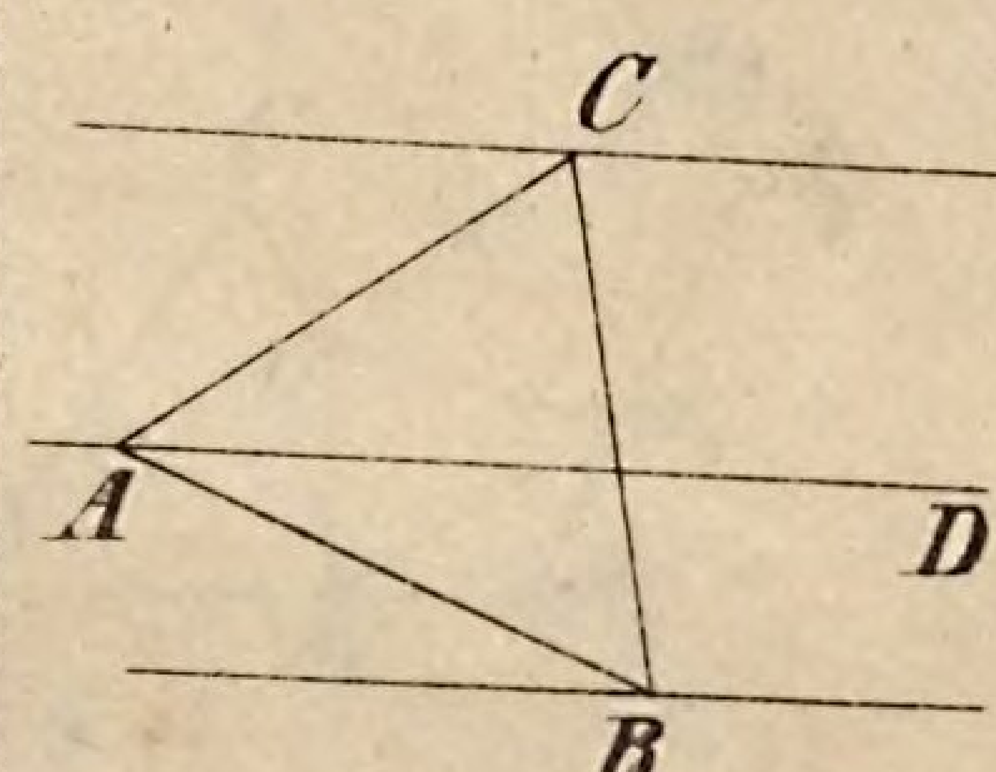


Fig. 19.

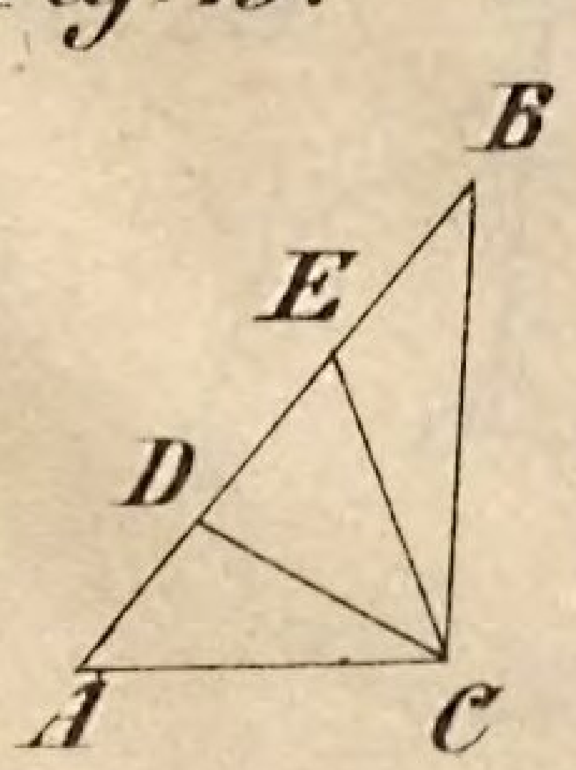


Fig. 20.

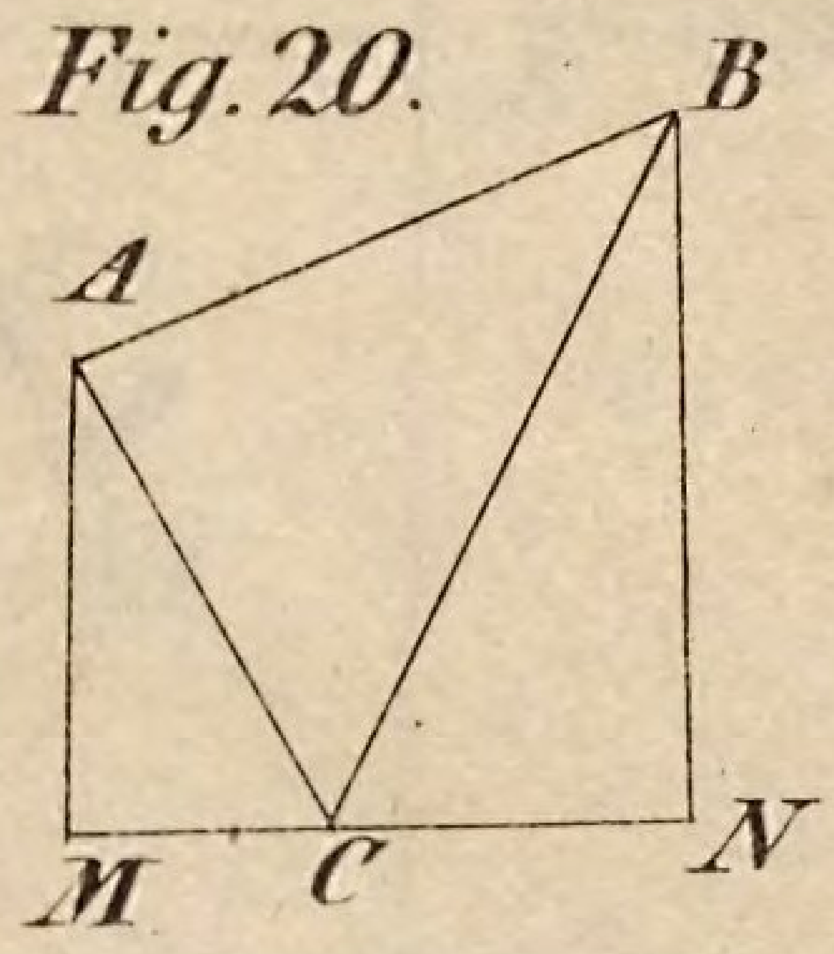


Fig. 21.

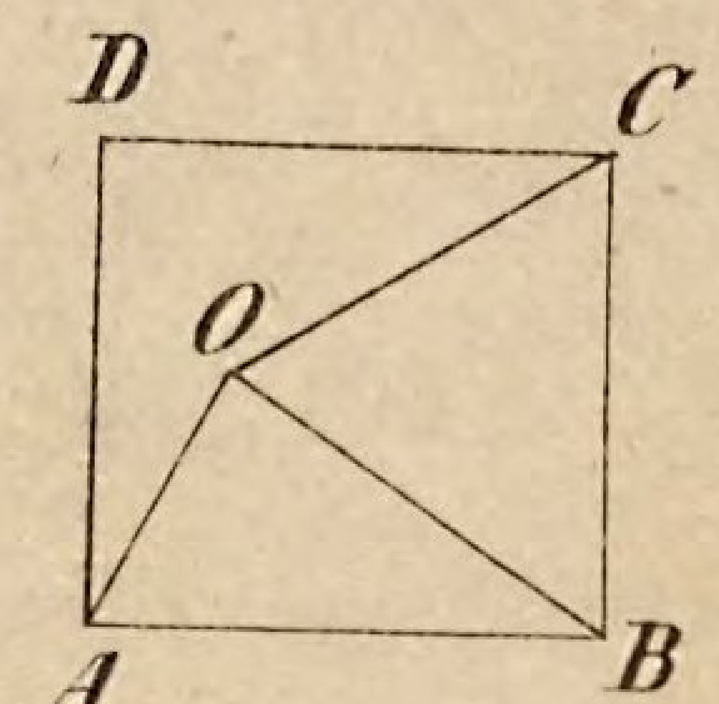


Fig. 22.

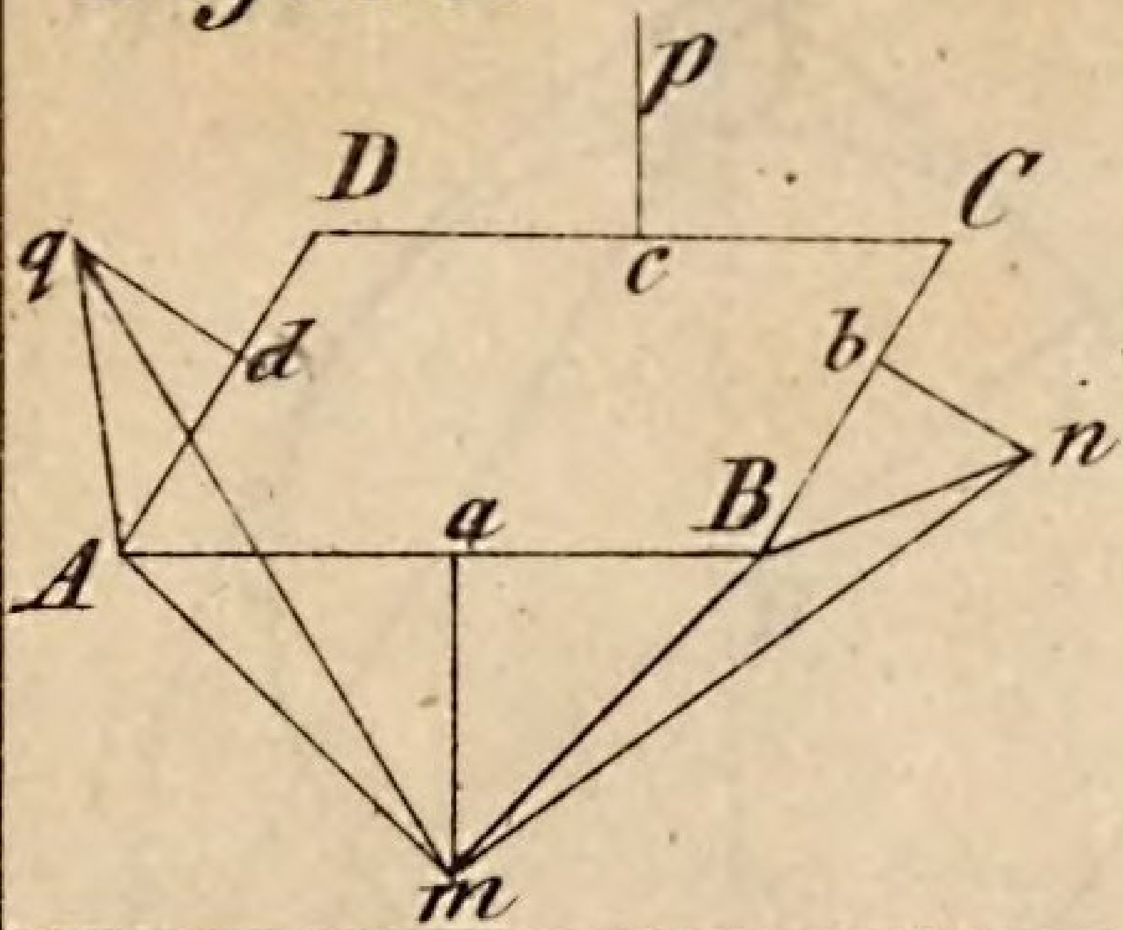


Fig. 23.

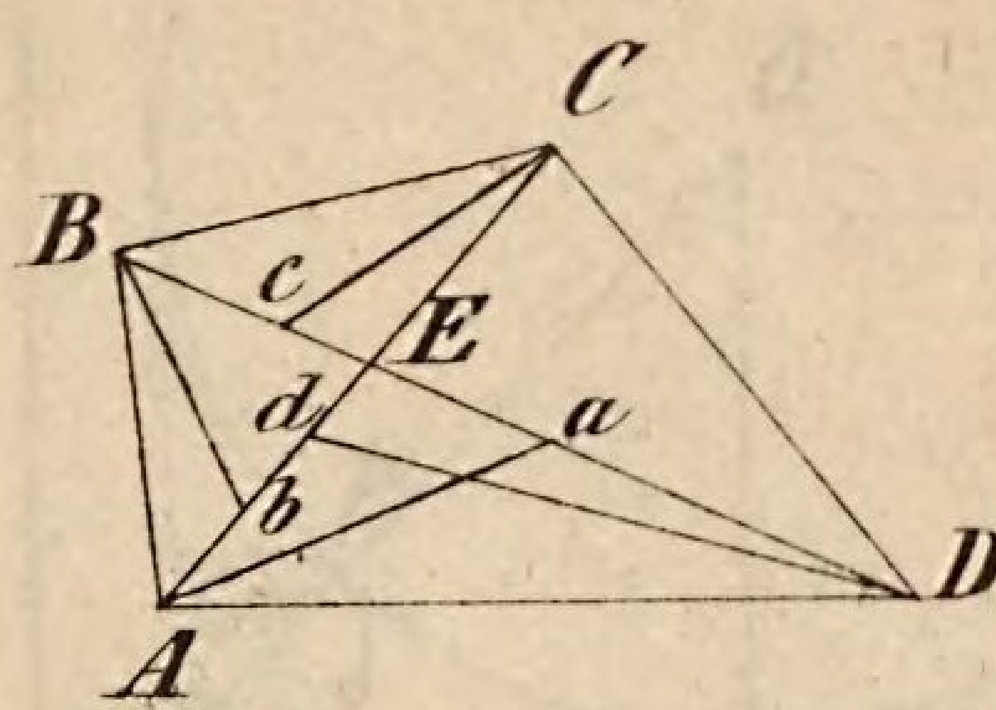


Fig. 24.

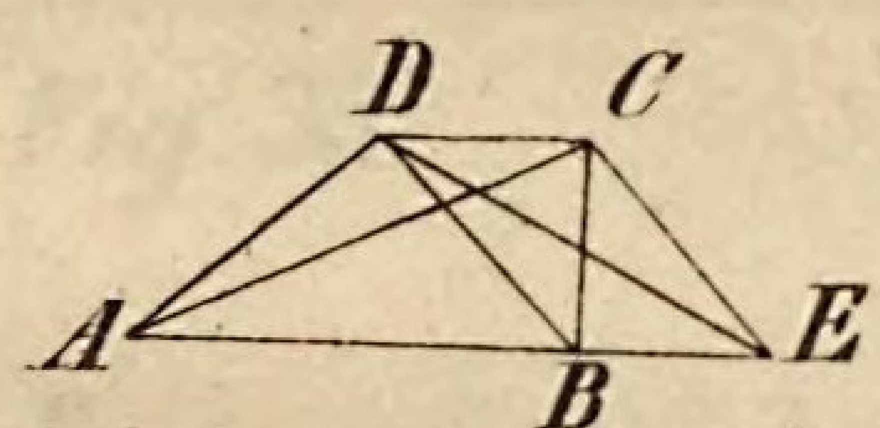


Fig. 26.

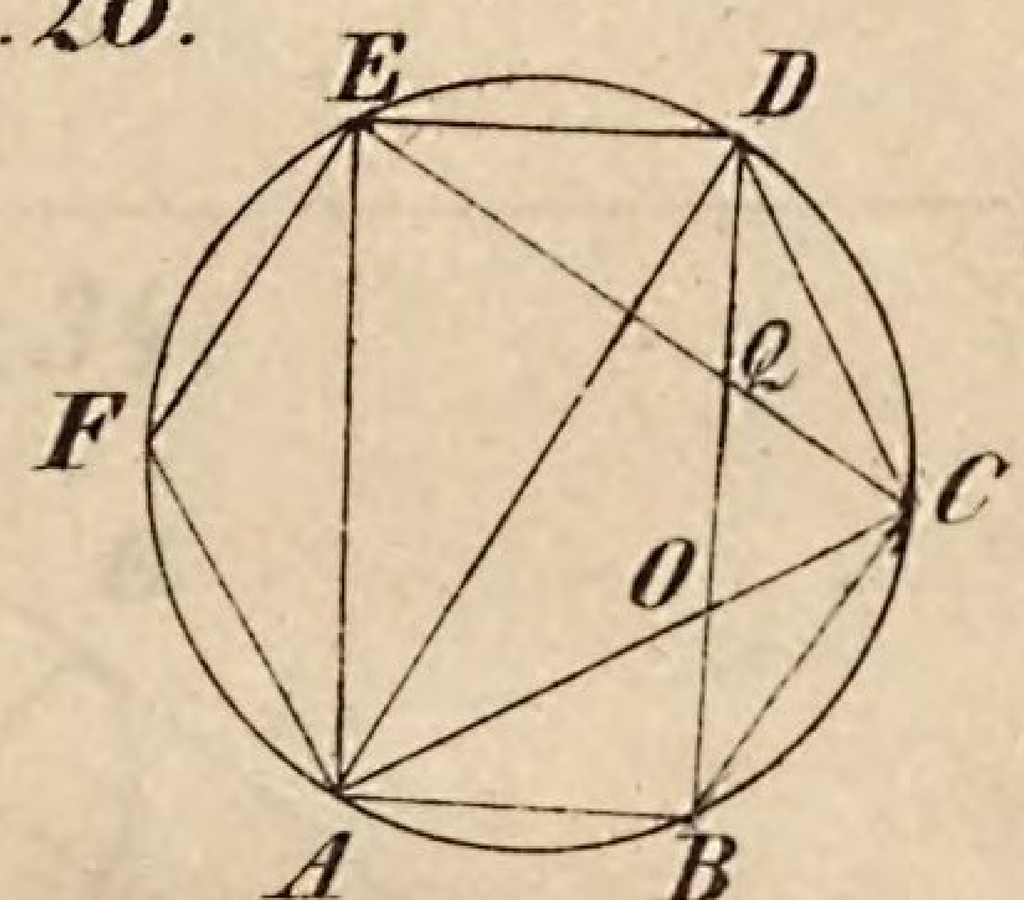


Fig. 25.

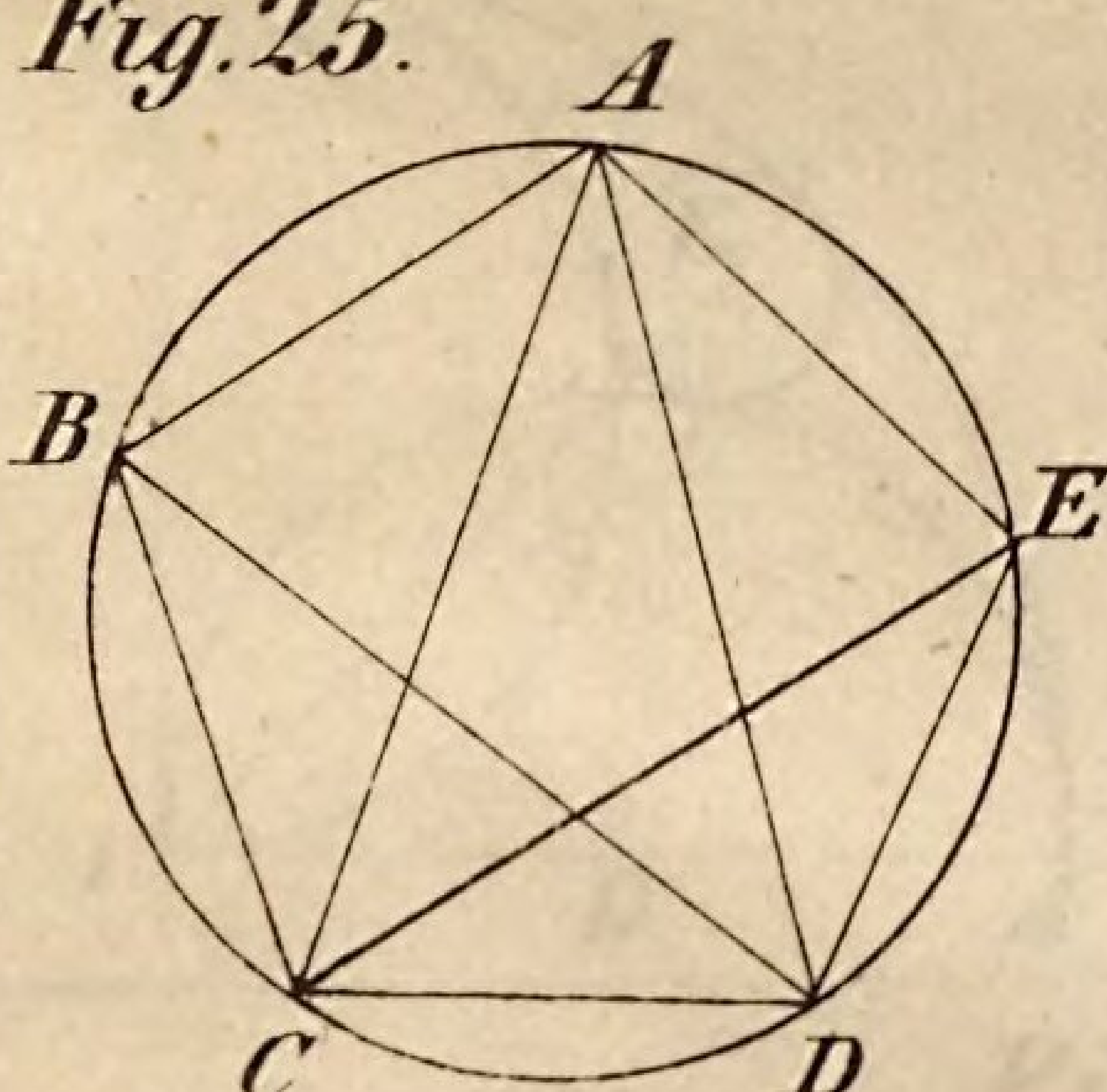


Fig. 27.

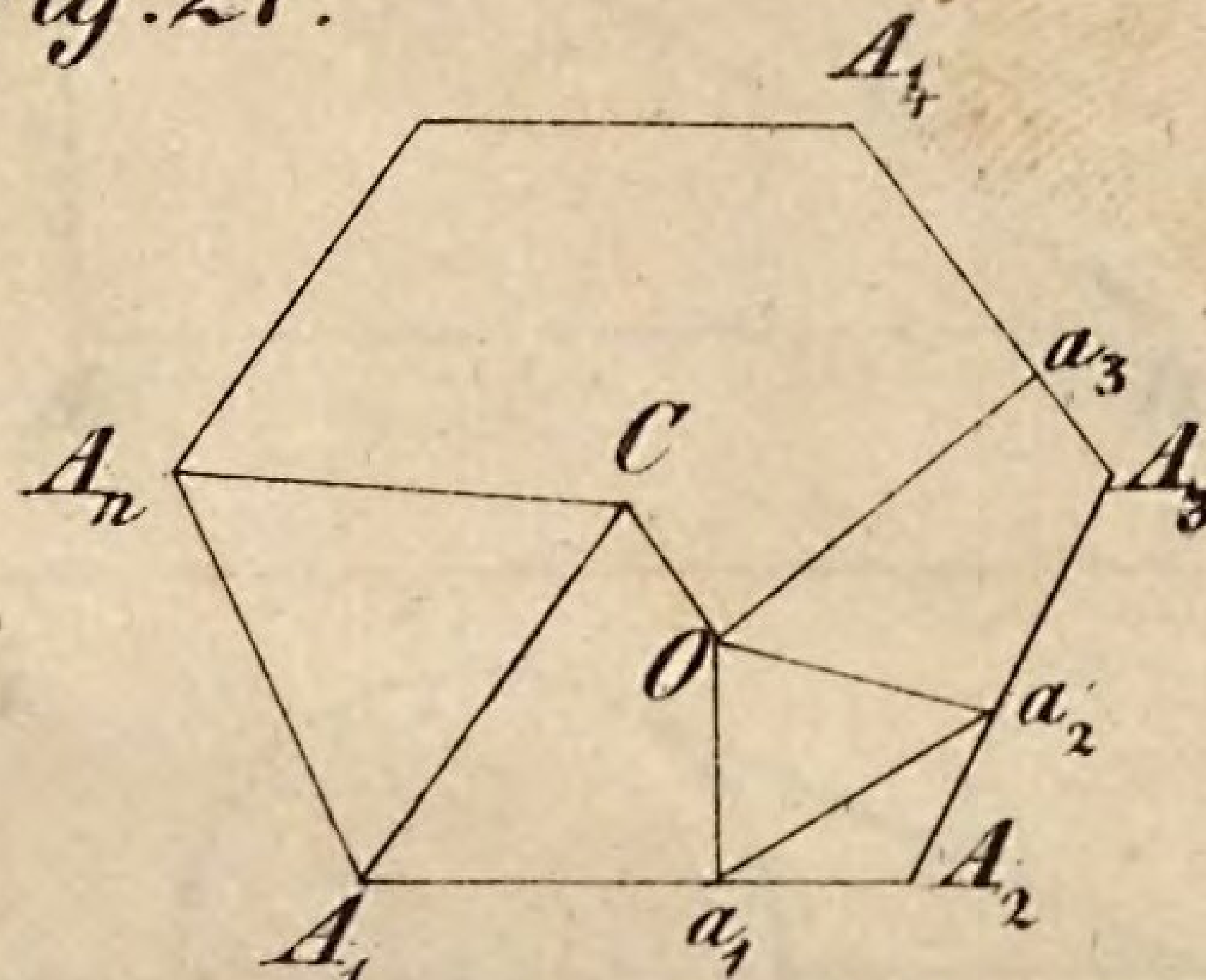


Fig. 28.

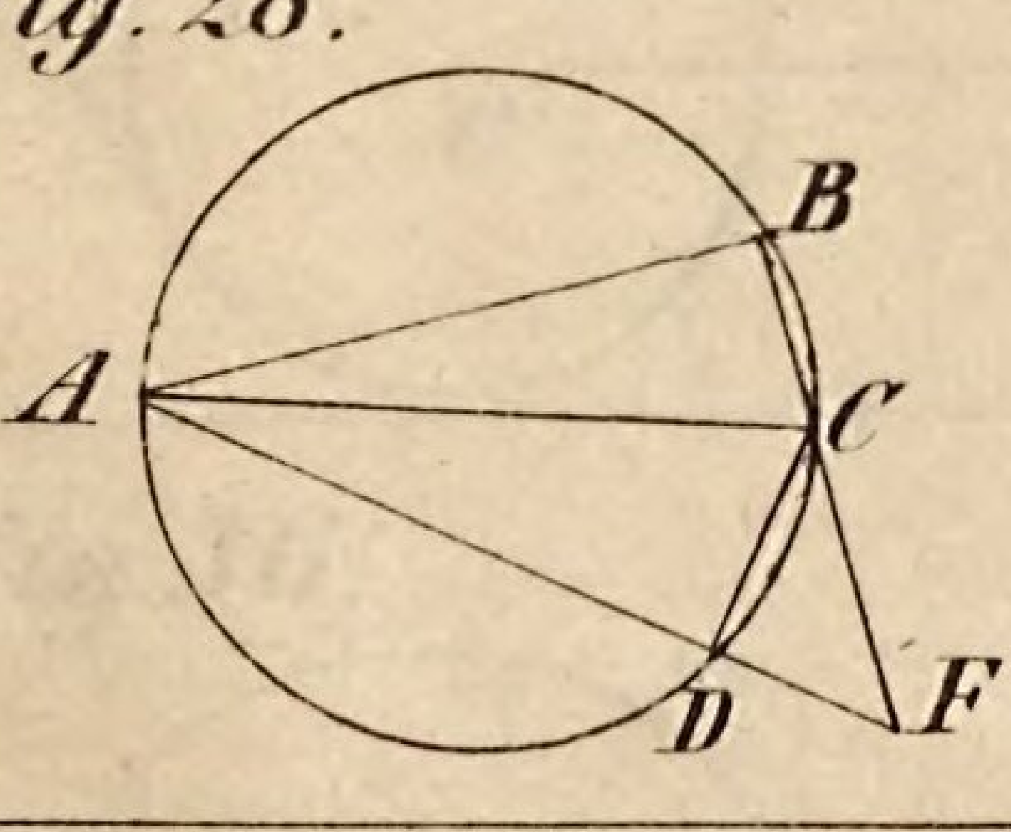


Fig. 30.

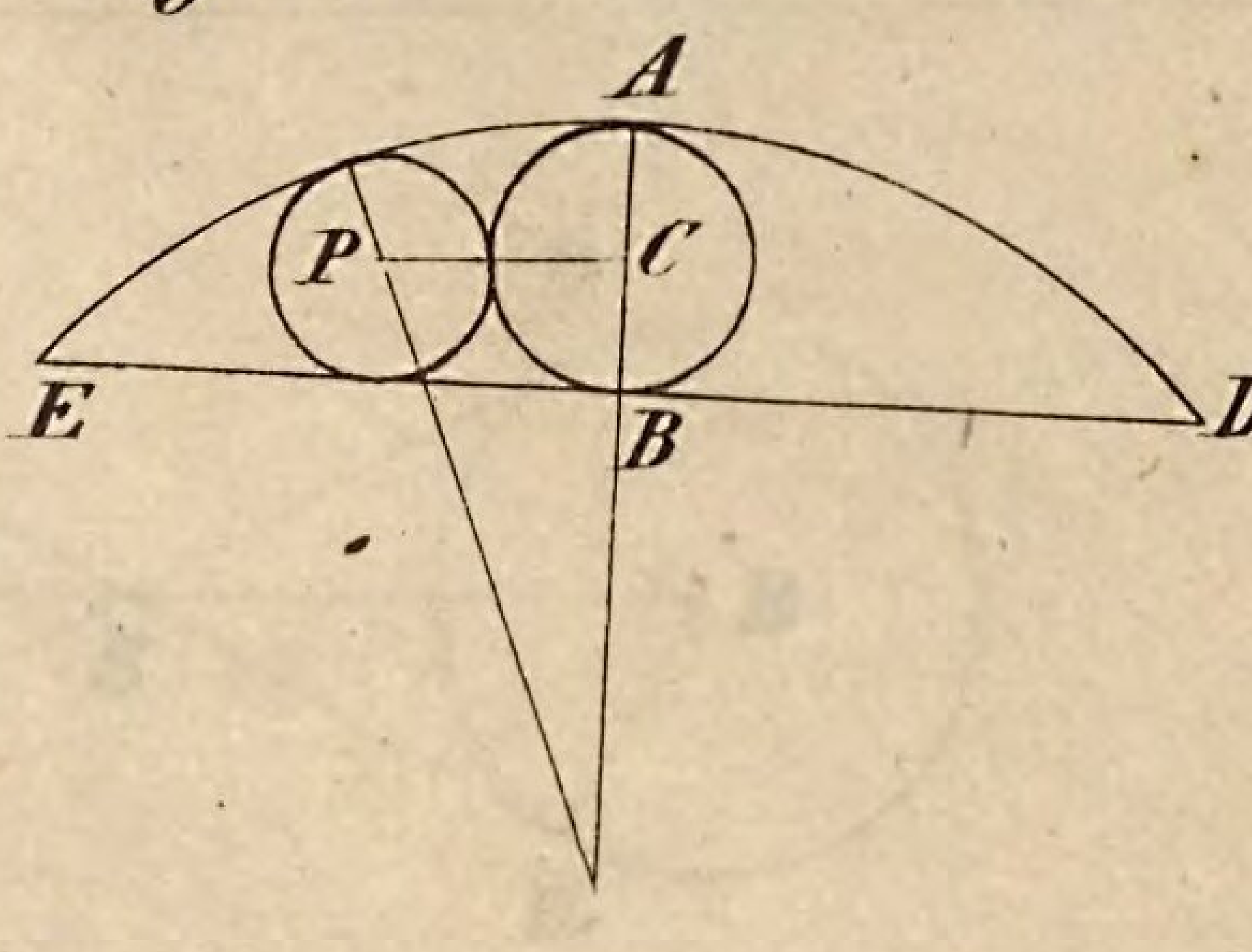
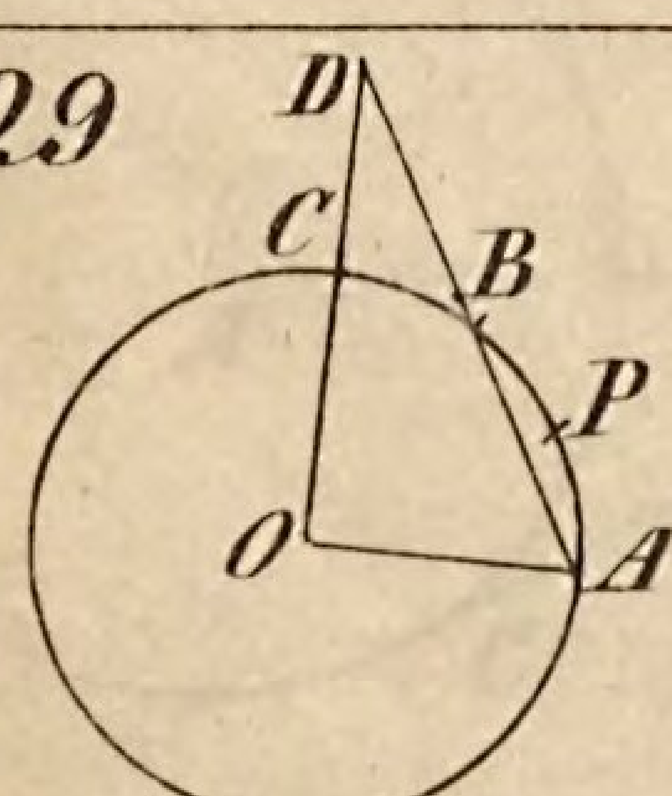


Fig. 29



V.

Fig. 31.

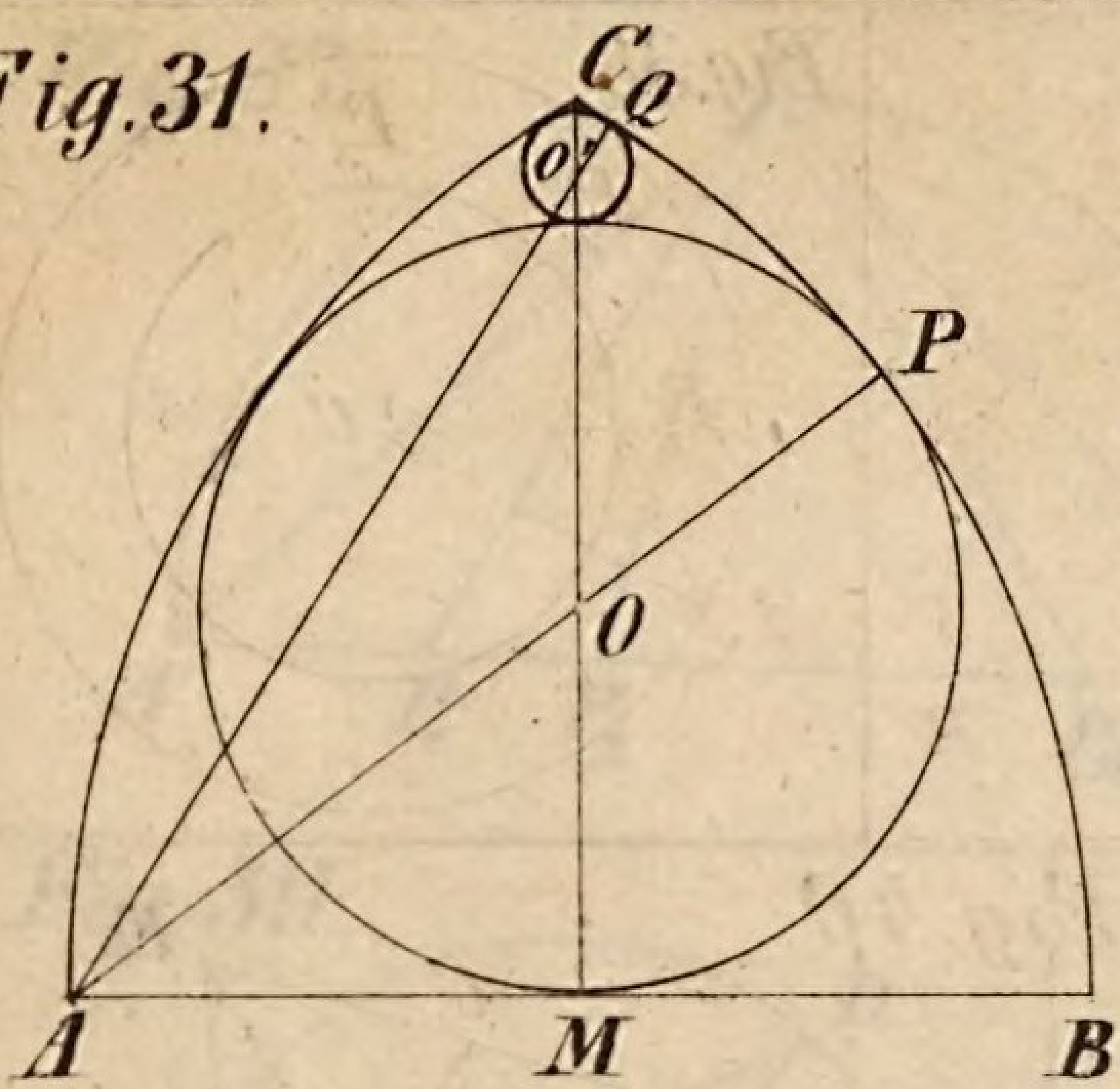


Fig. 32.

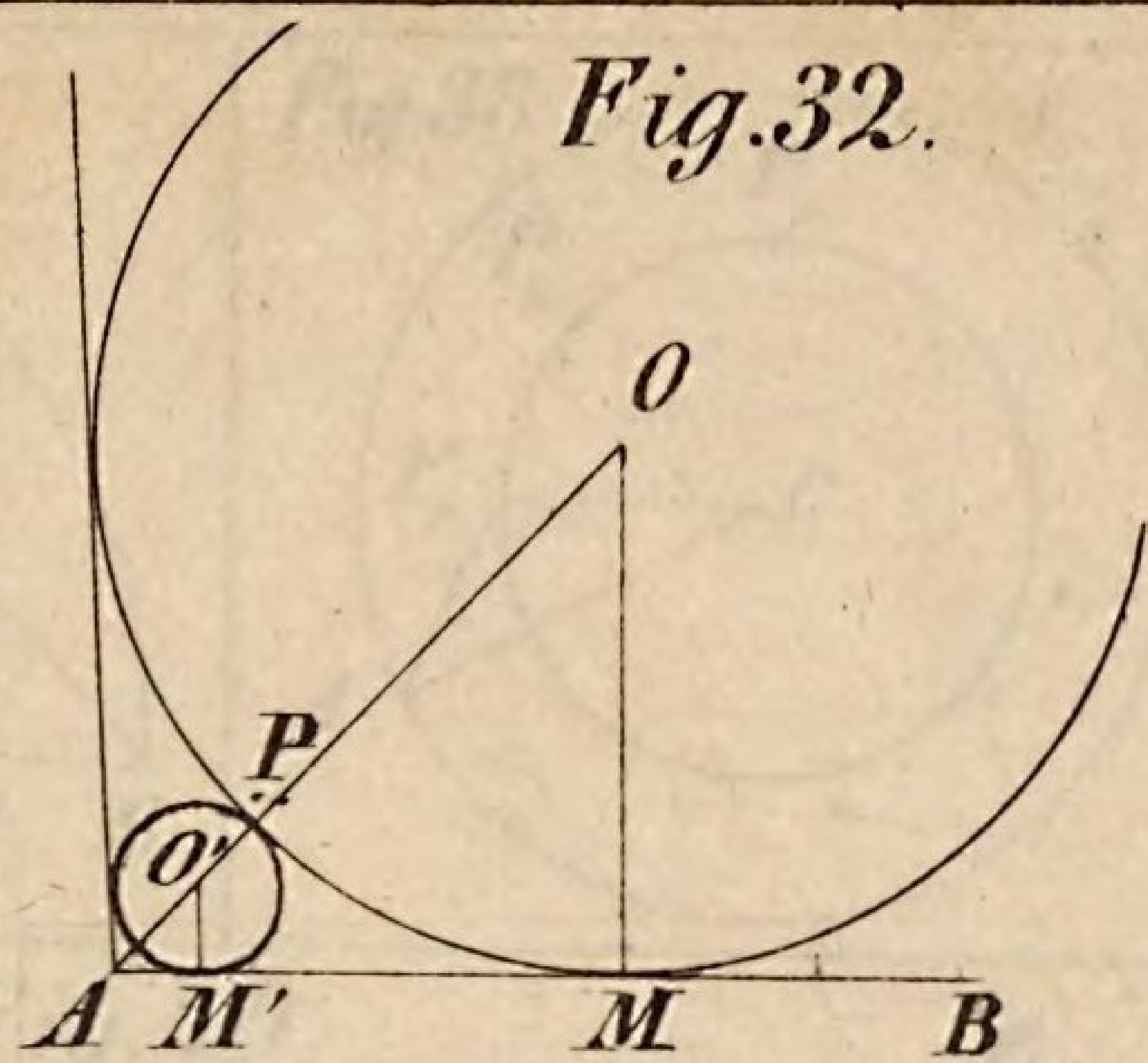


Fig. 33.

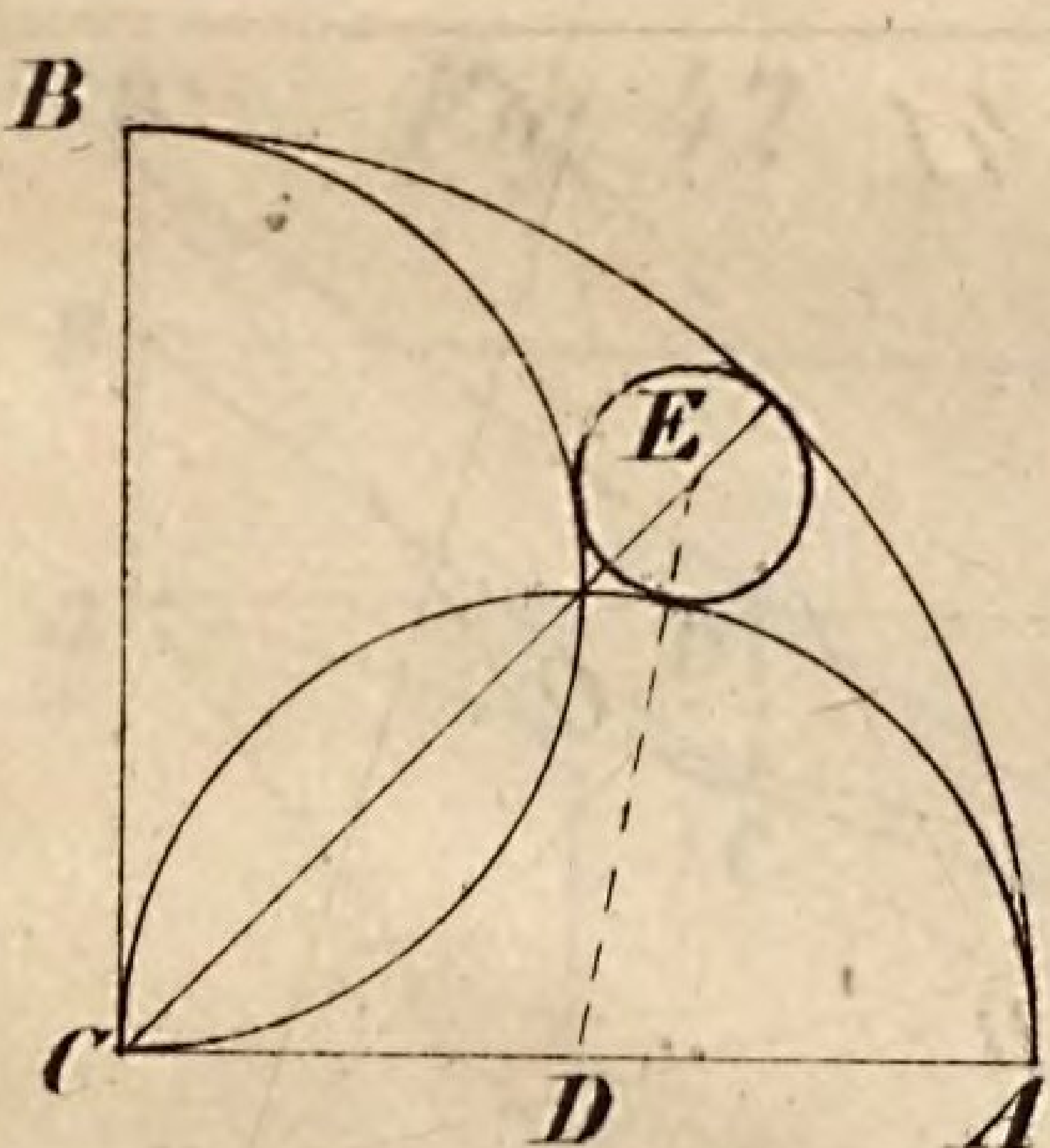


Fig. 34.

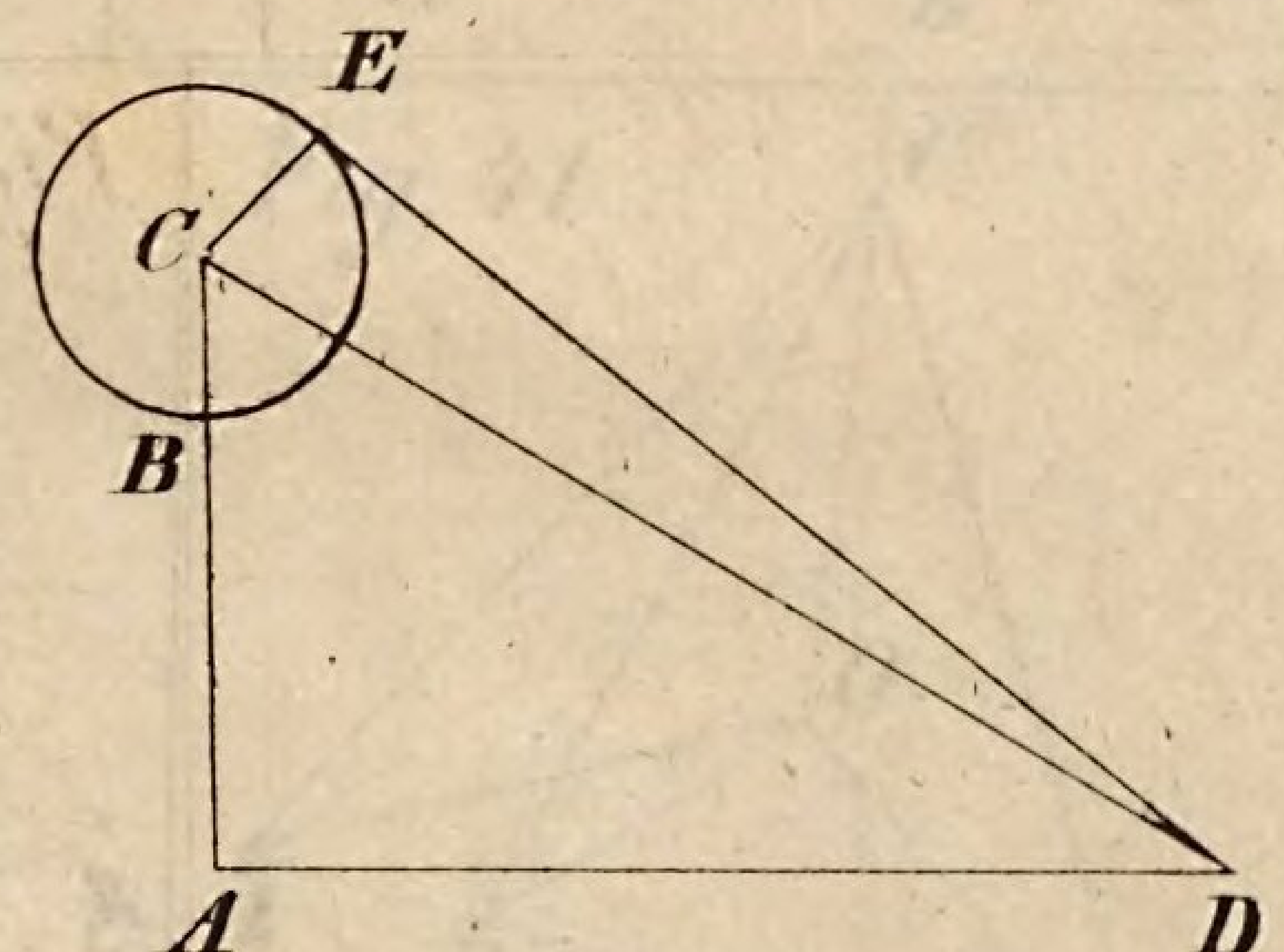


Fig. 35.

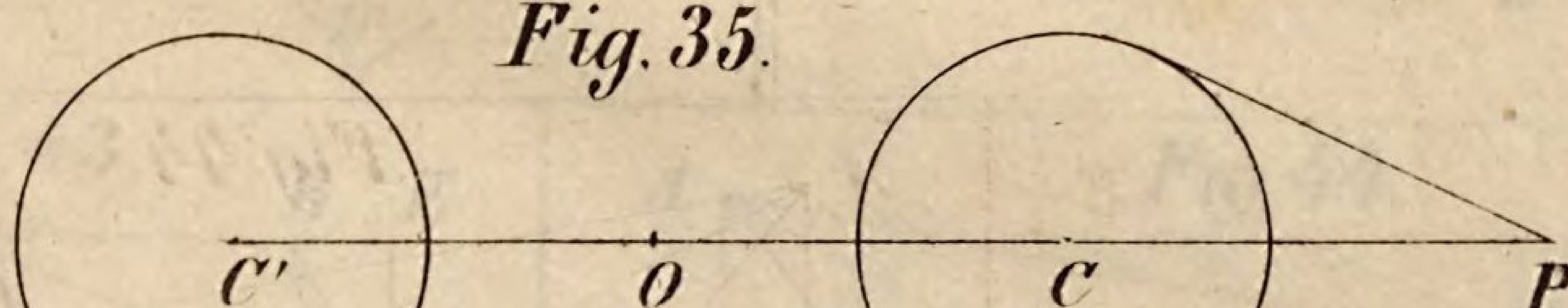


Fig. 36.

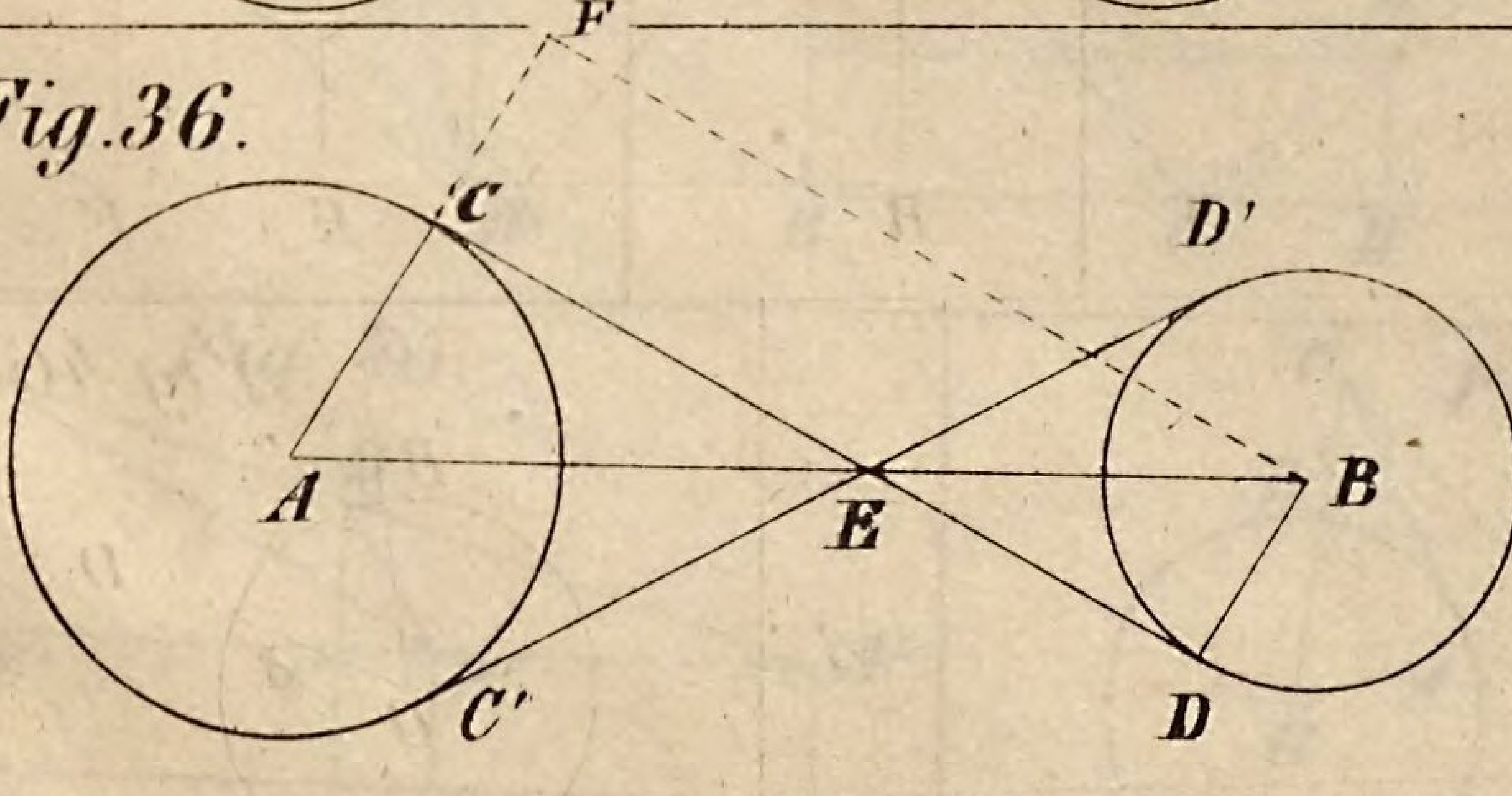


Fig. 37.

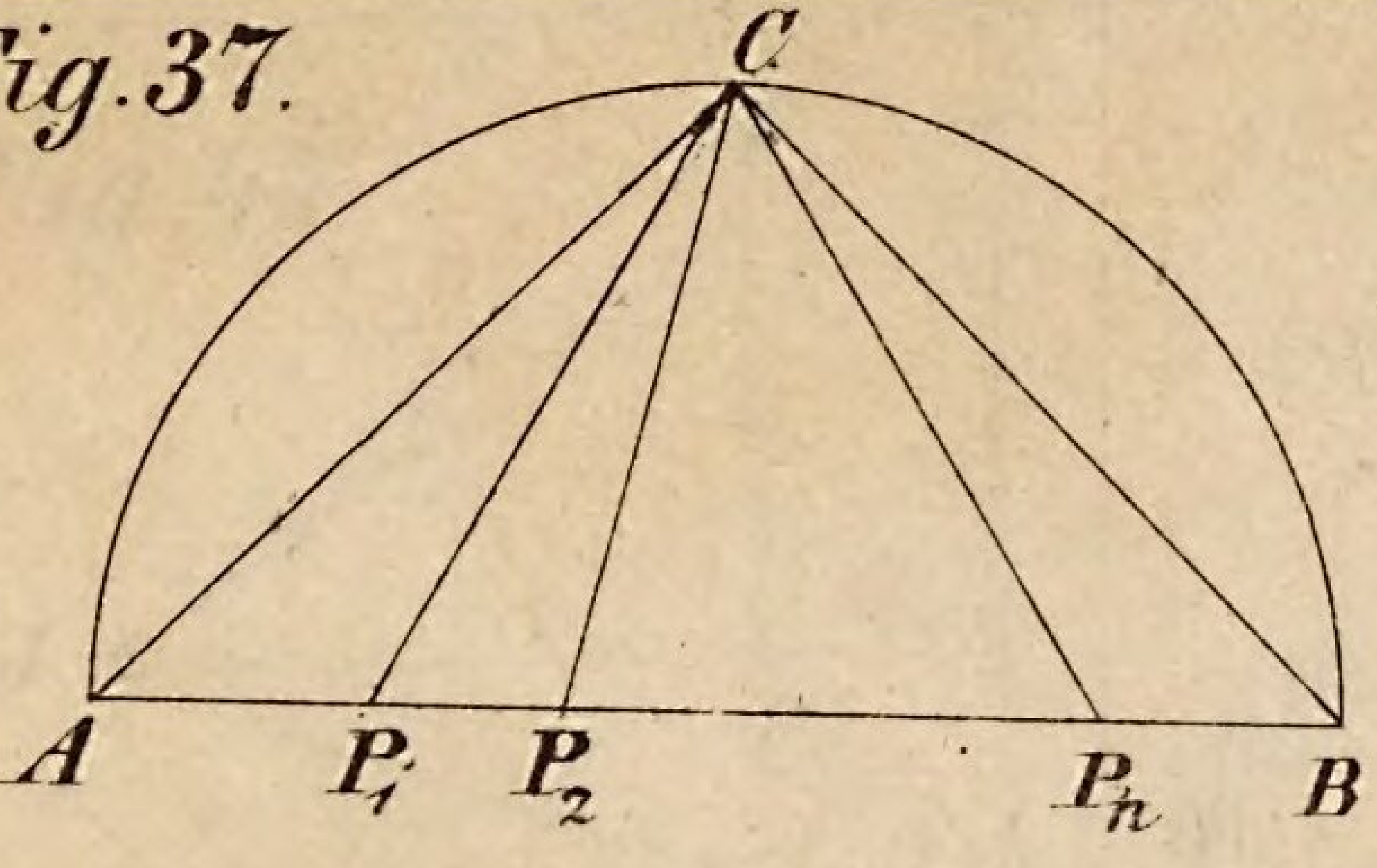


Fig. 38.

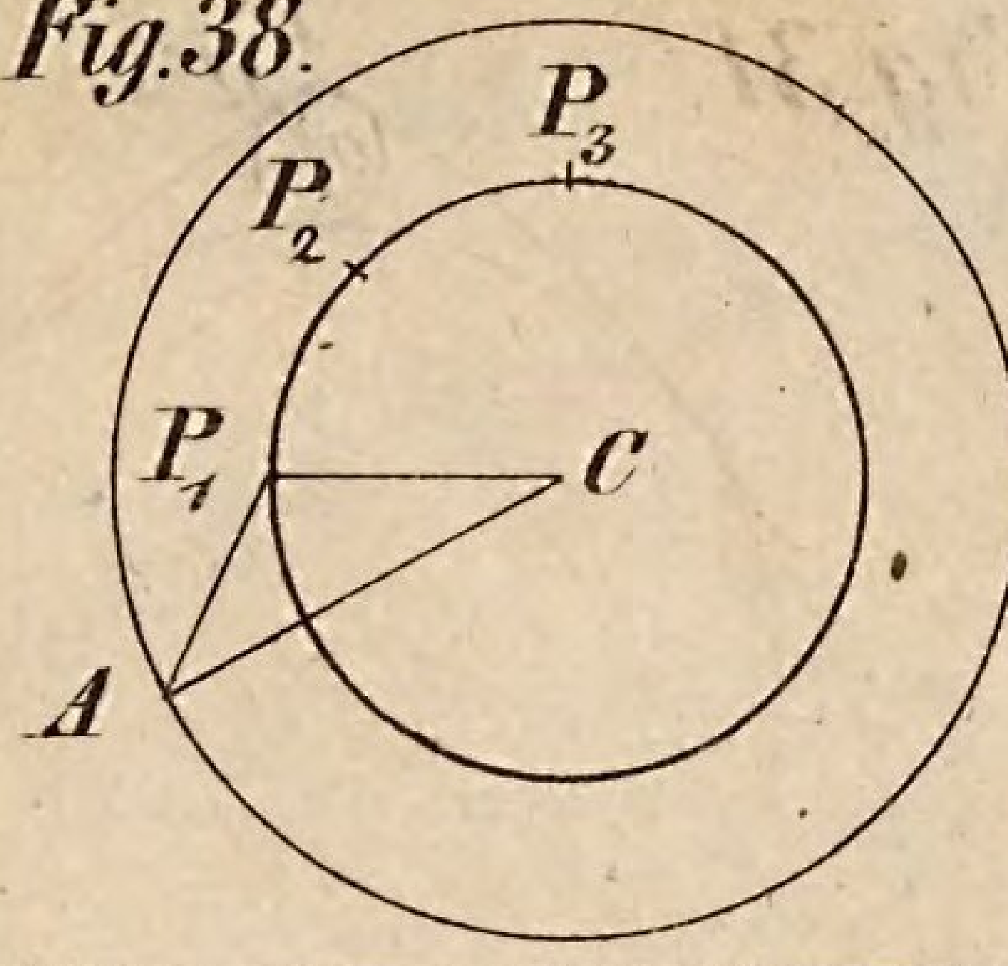


Fig. 39.

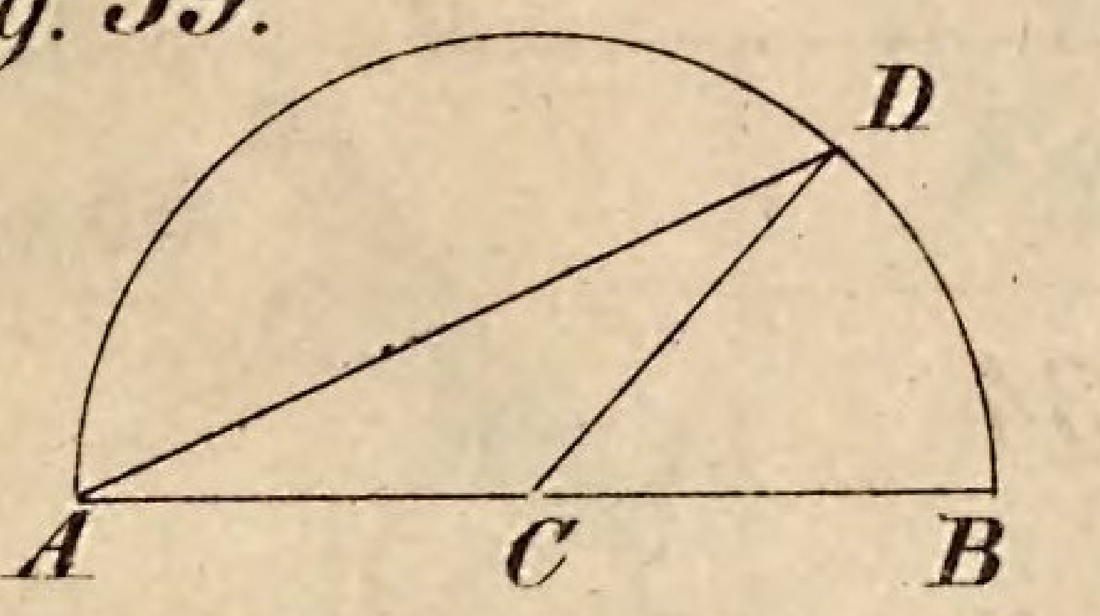


Fig. 40.

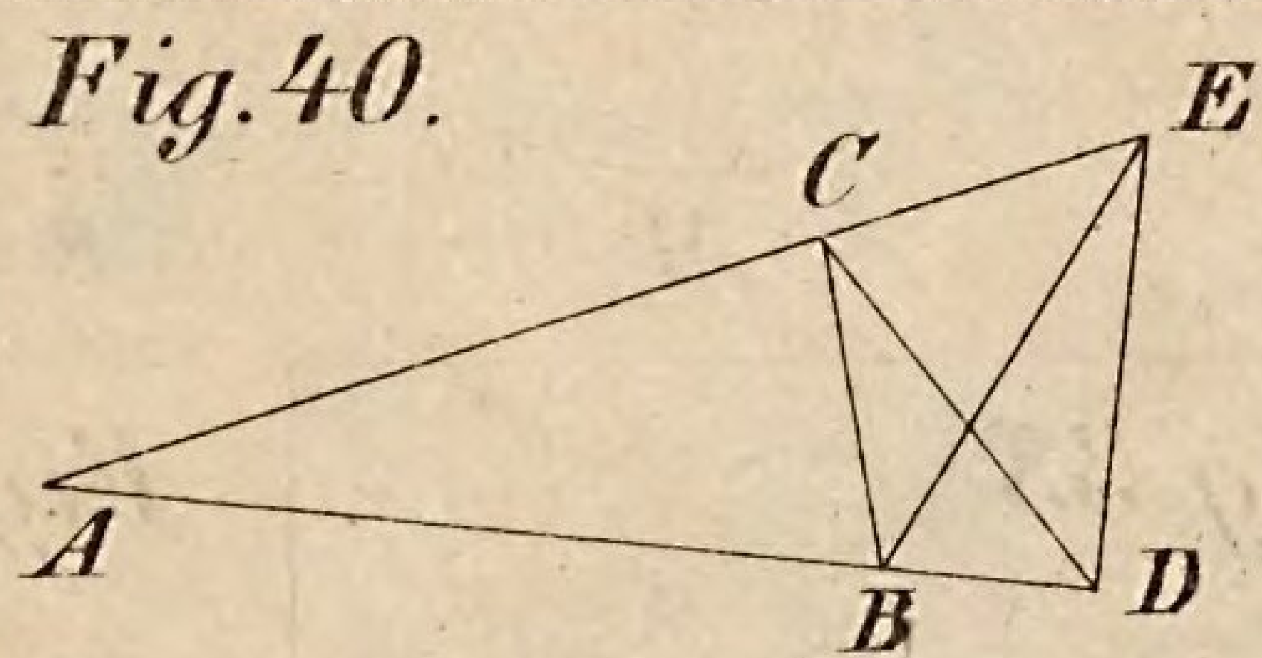


Fig. 42.

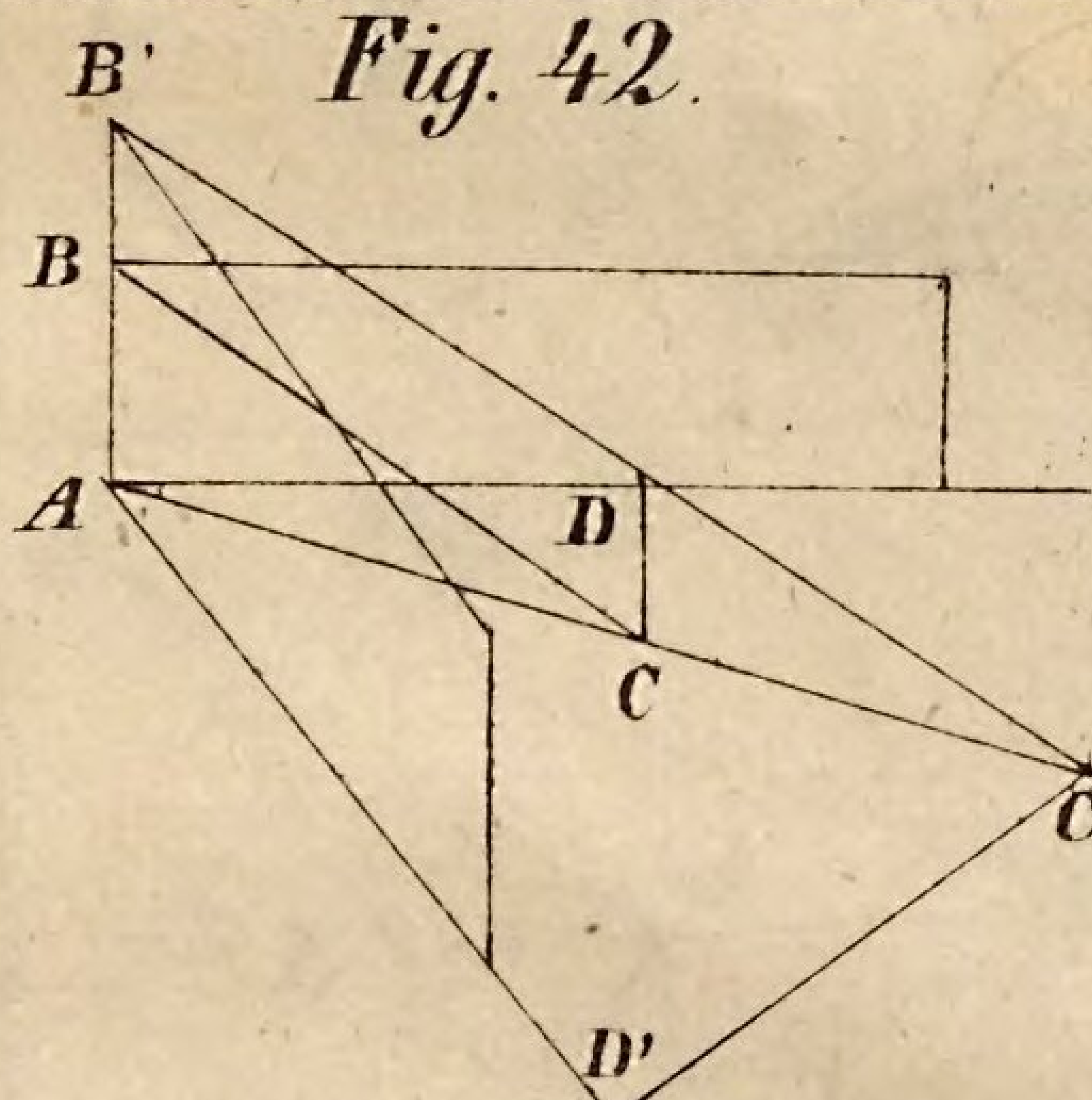


Fig. 41

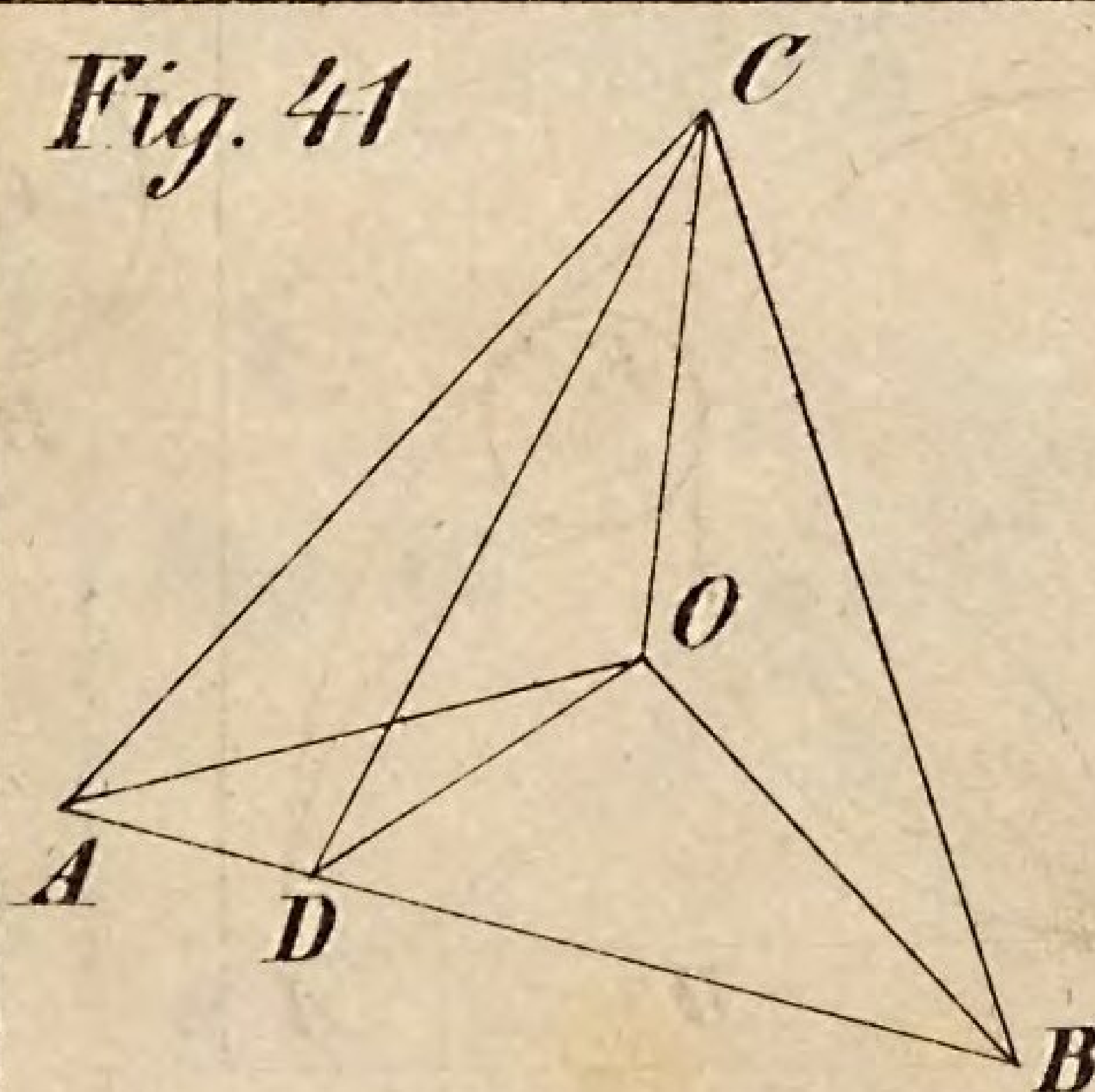


Fig. 43.

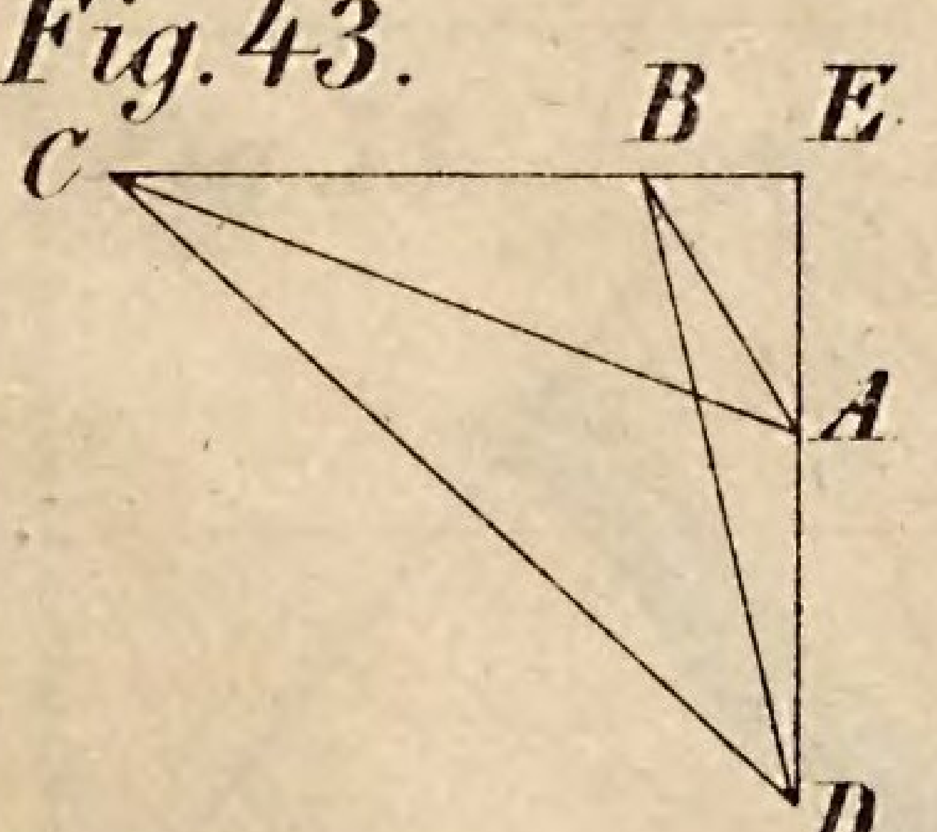


Fig 44.

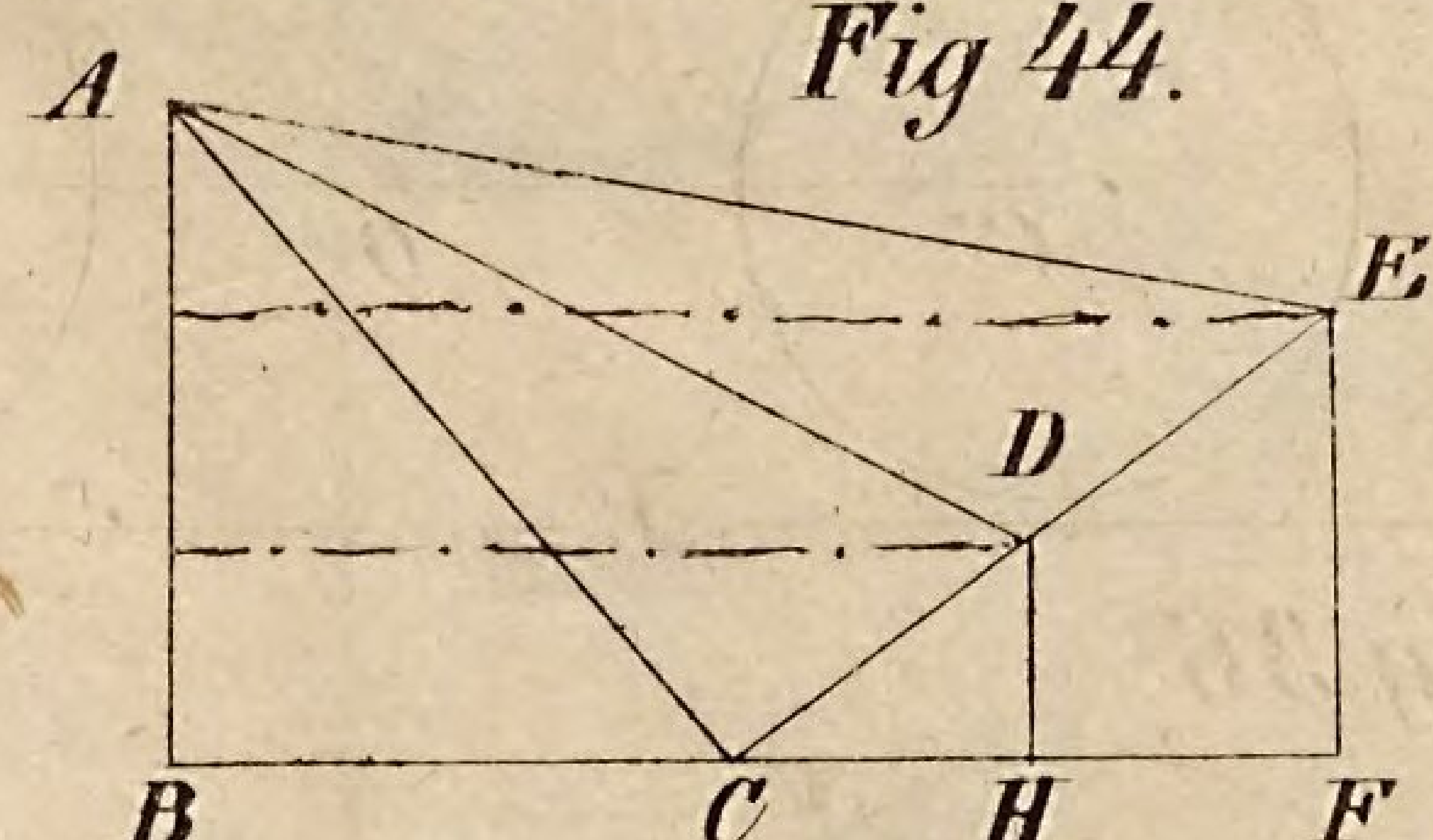


Fig. 45.

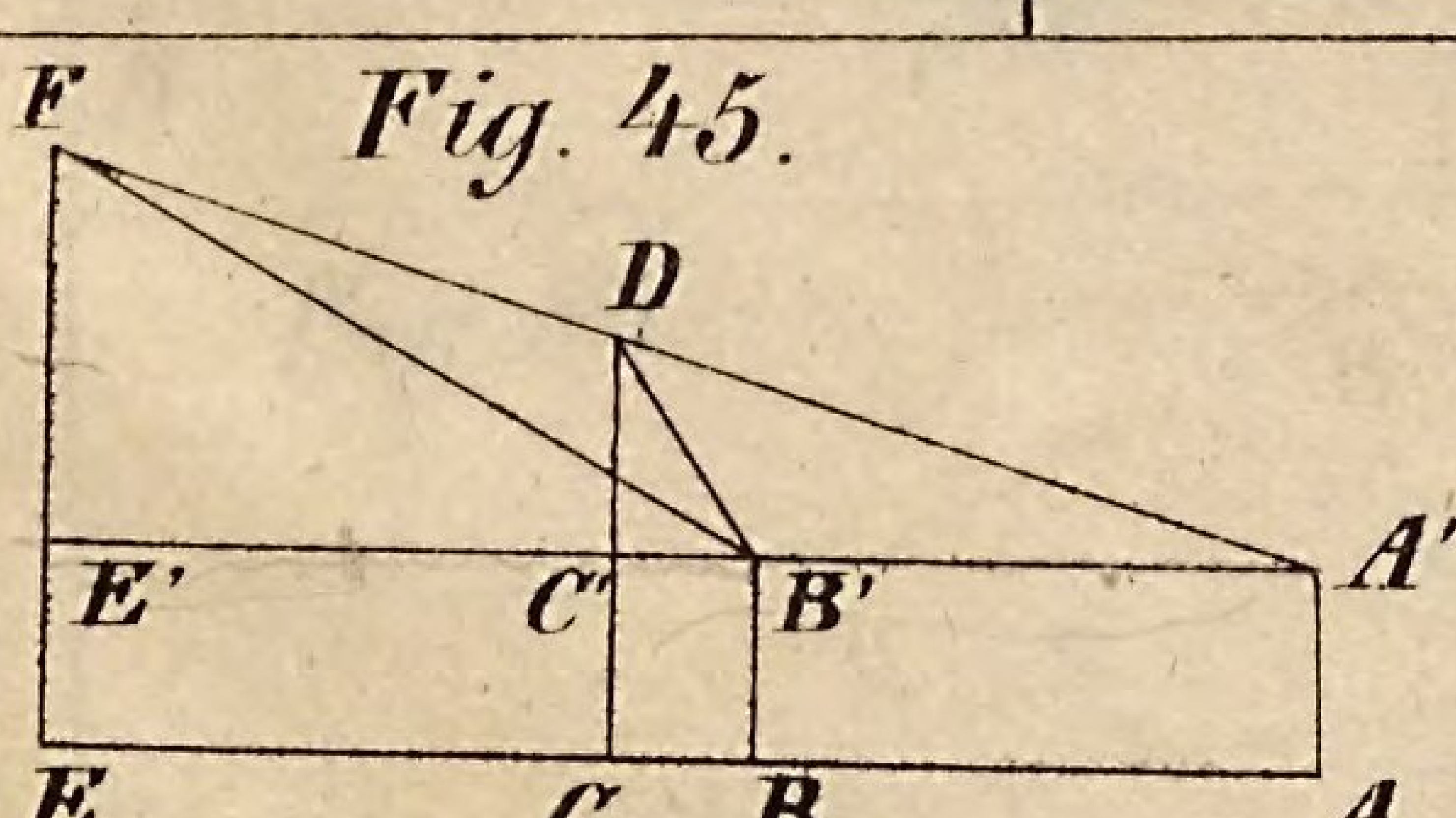


Fig. 46.

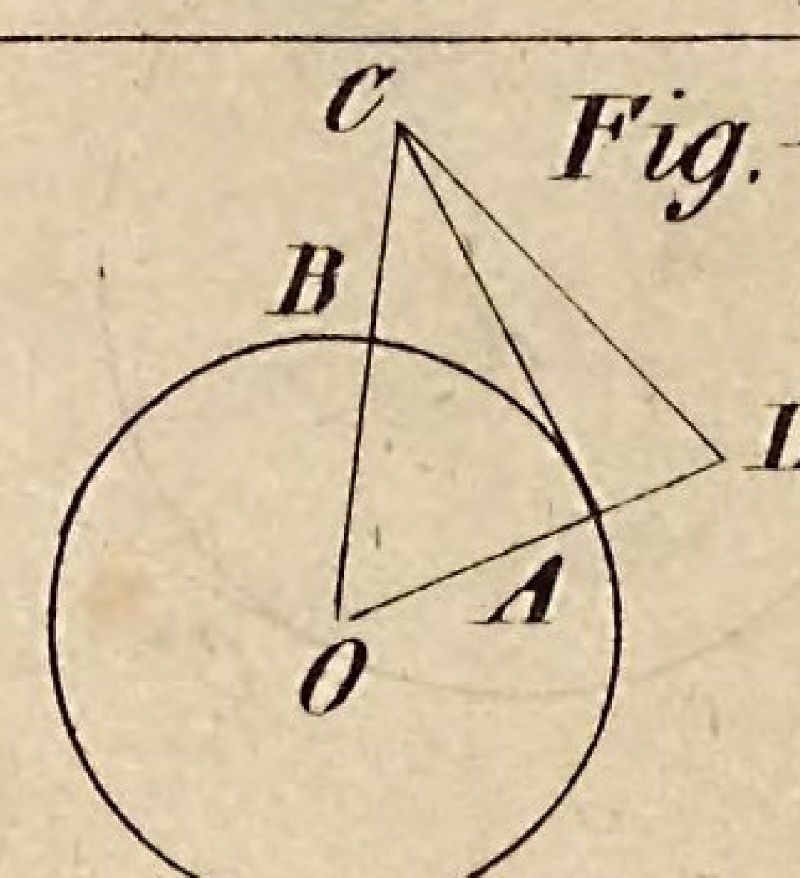


Fig. 47.

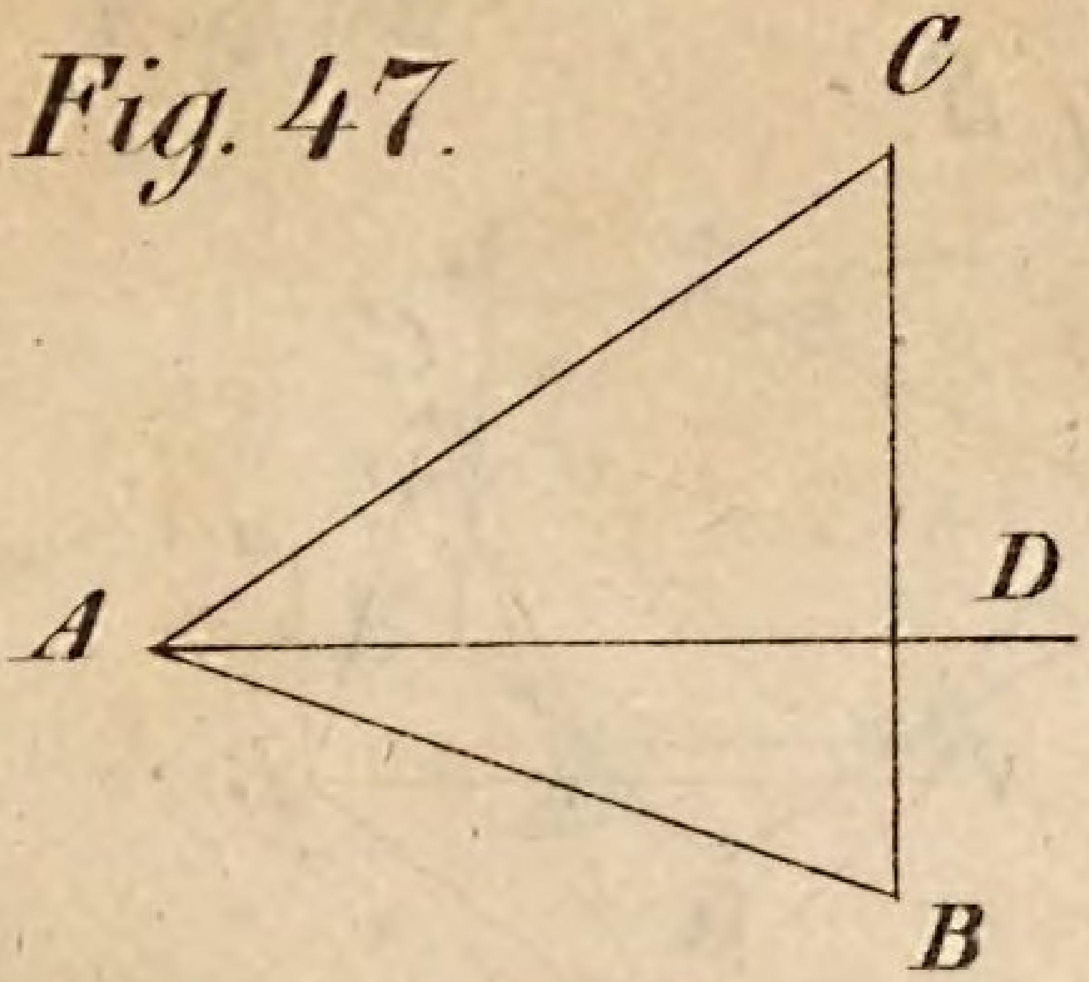


Fig. 48.

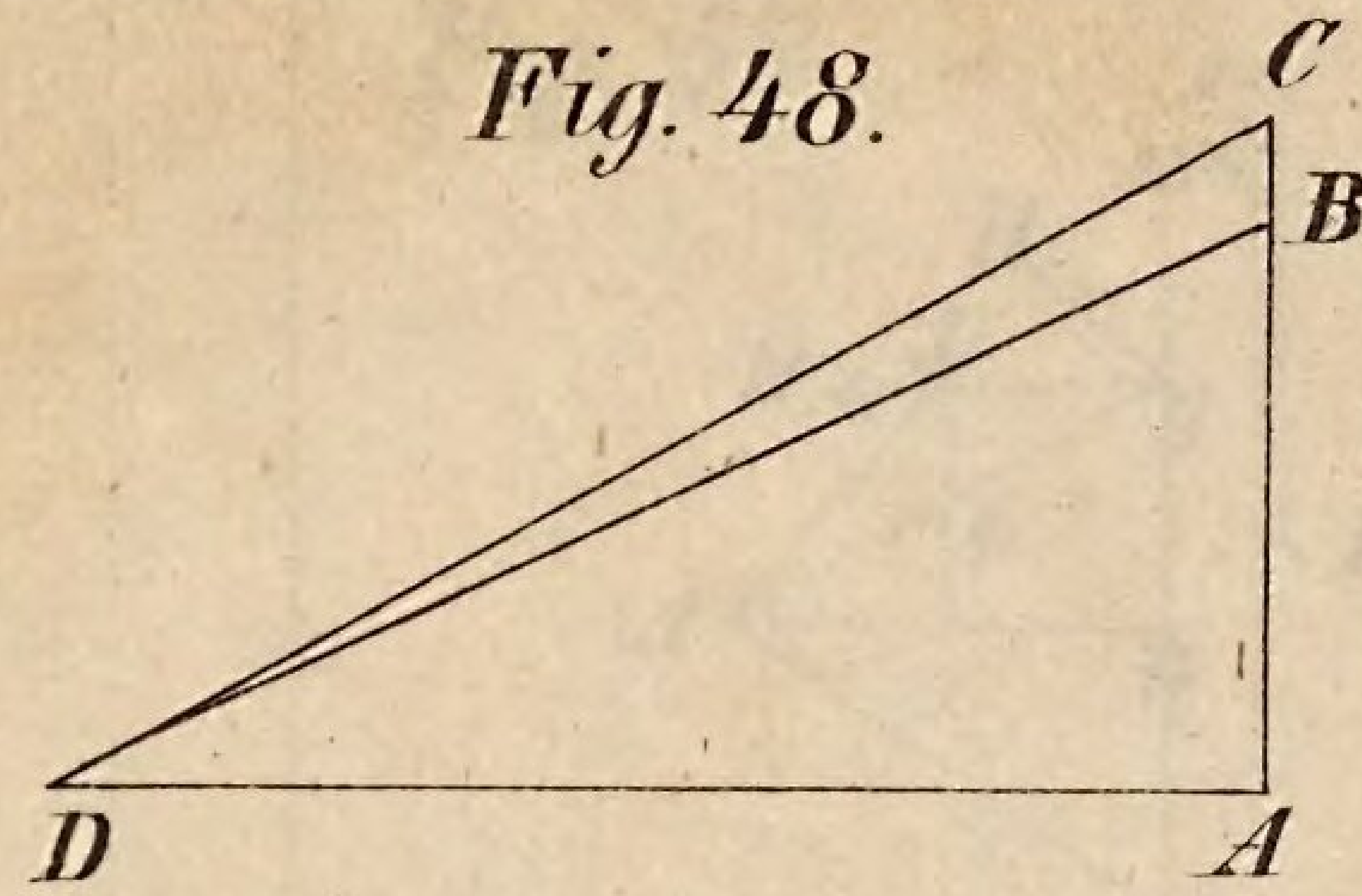


Fig. 49.

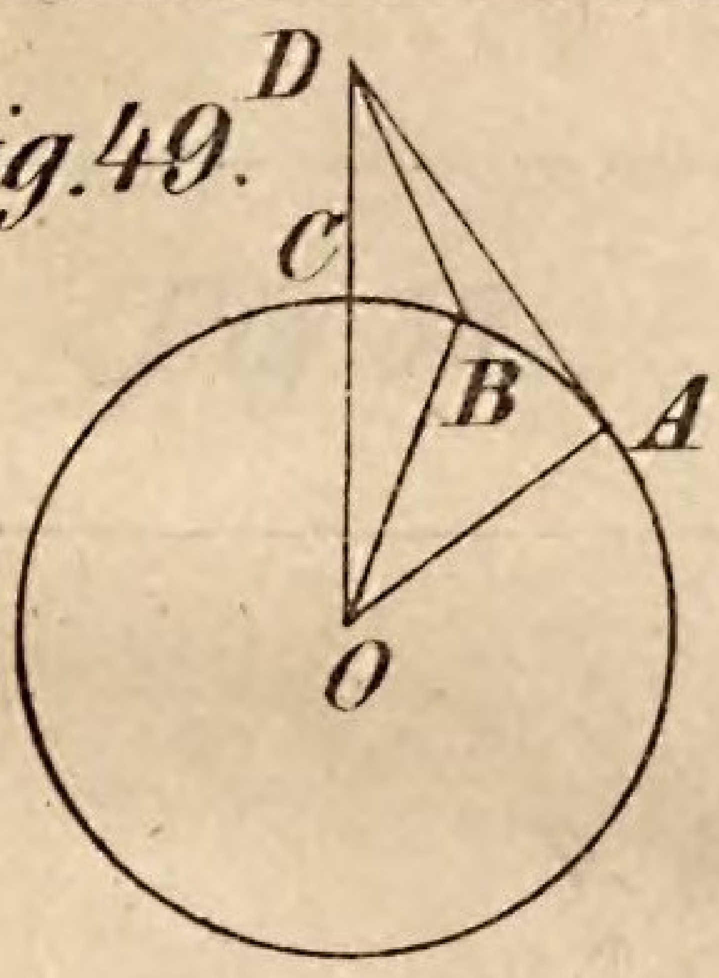


Fig. 50.

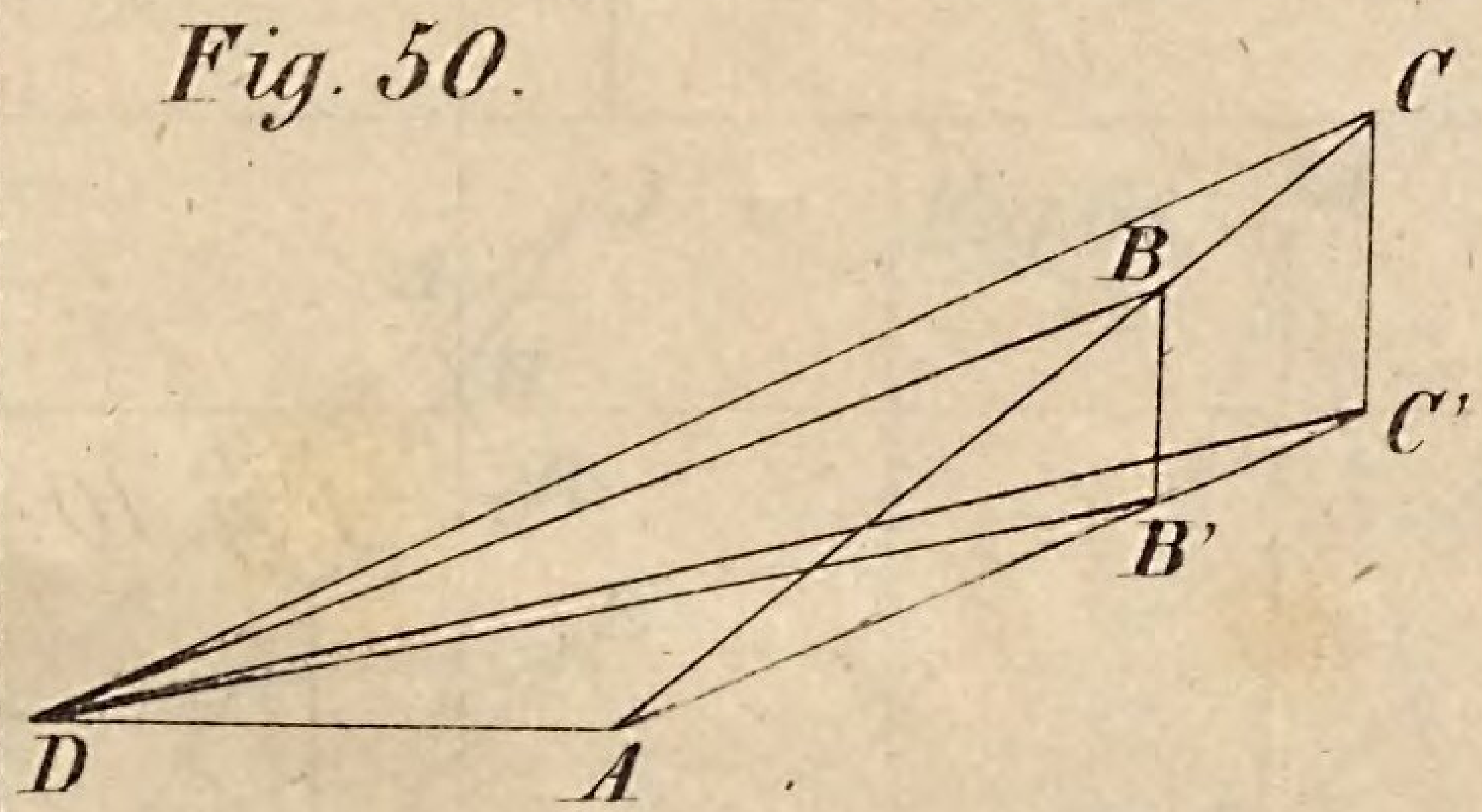


Fig. 51.

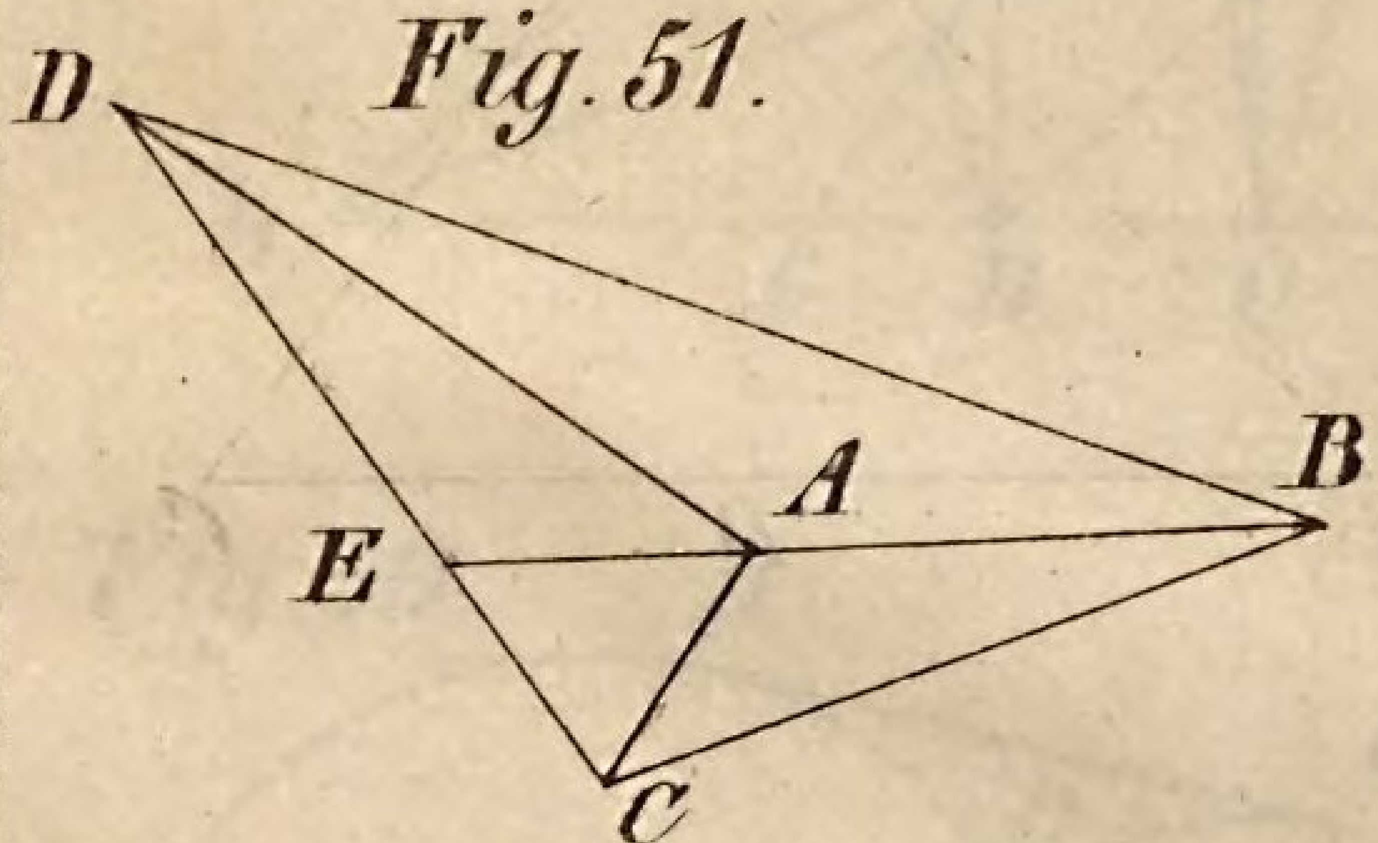


Fig. 52.

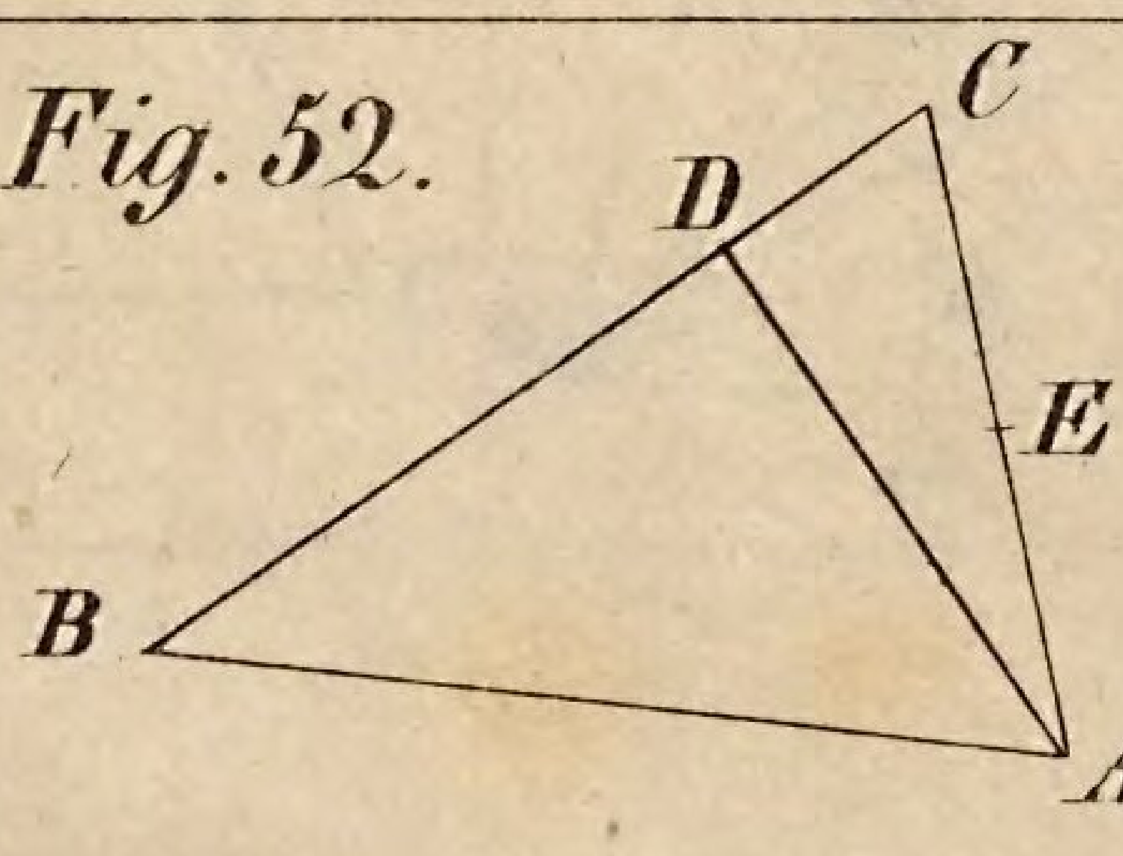


Fig. 53.

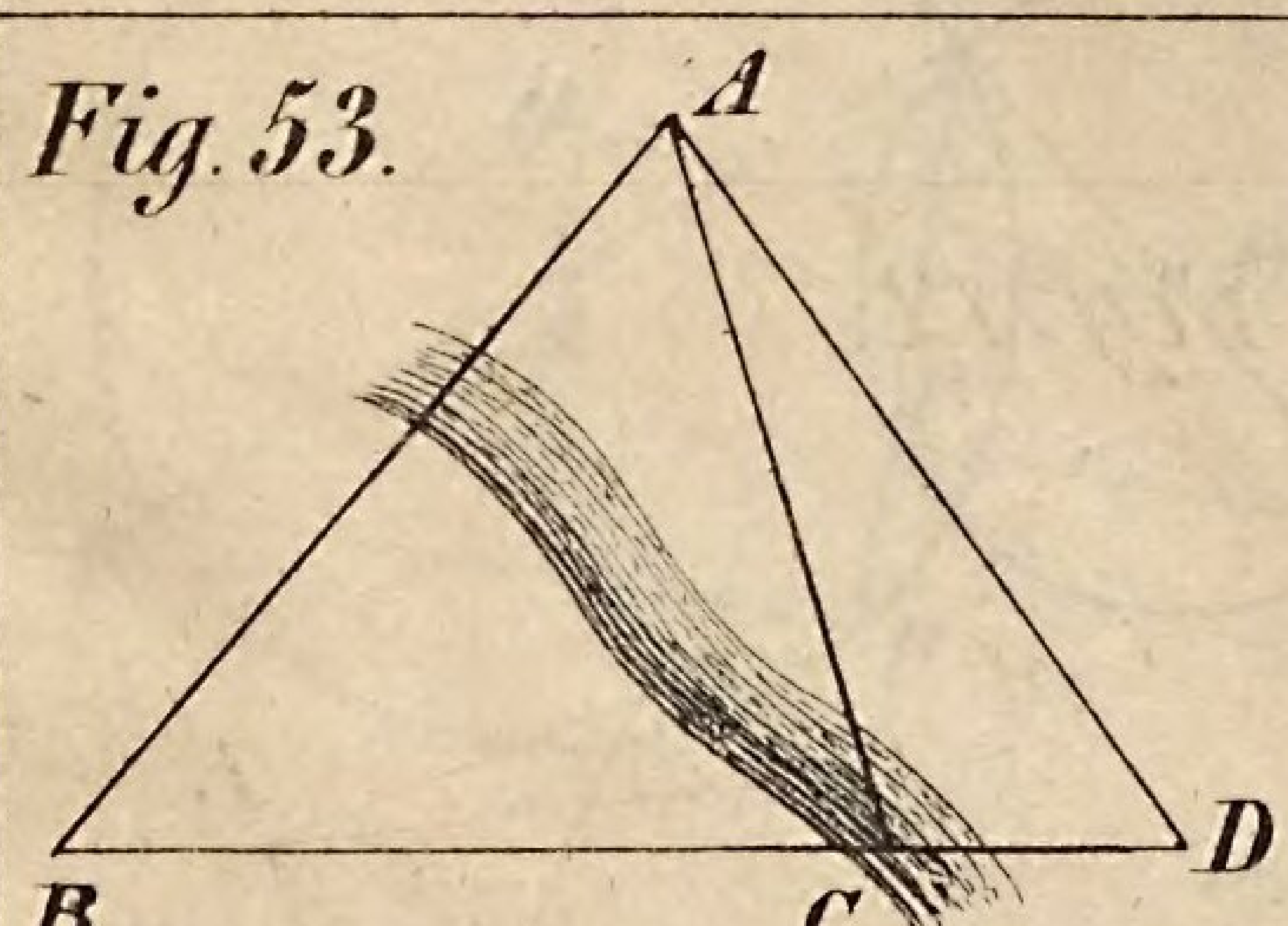


Fig. 54

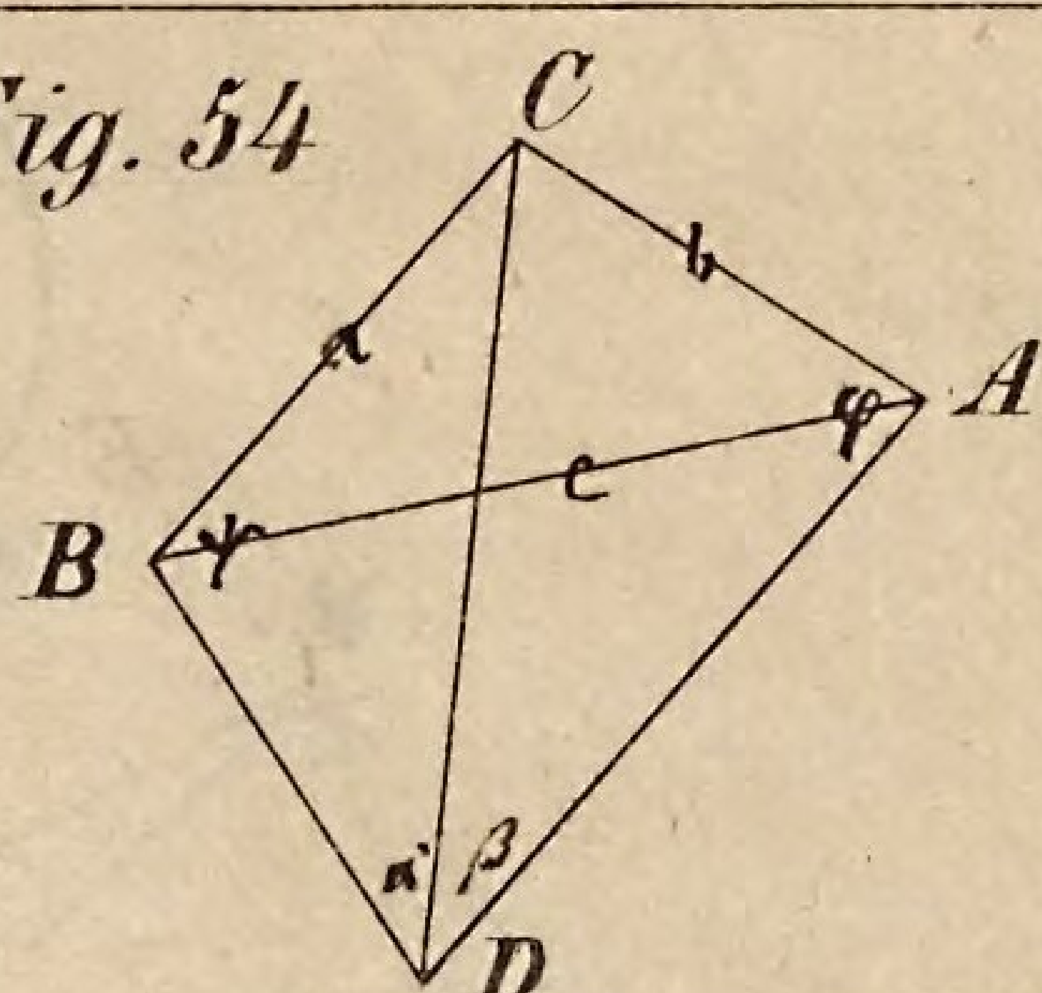


Fig. 55.

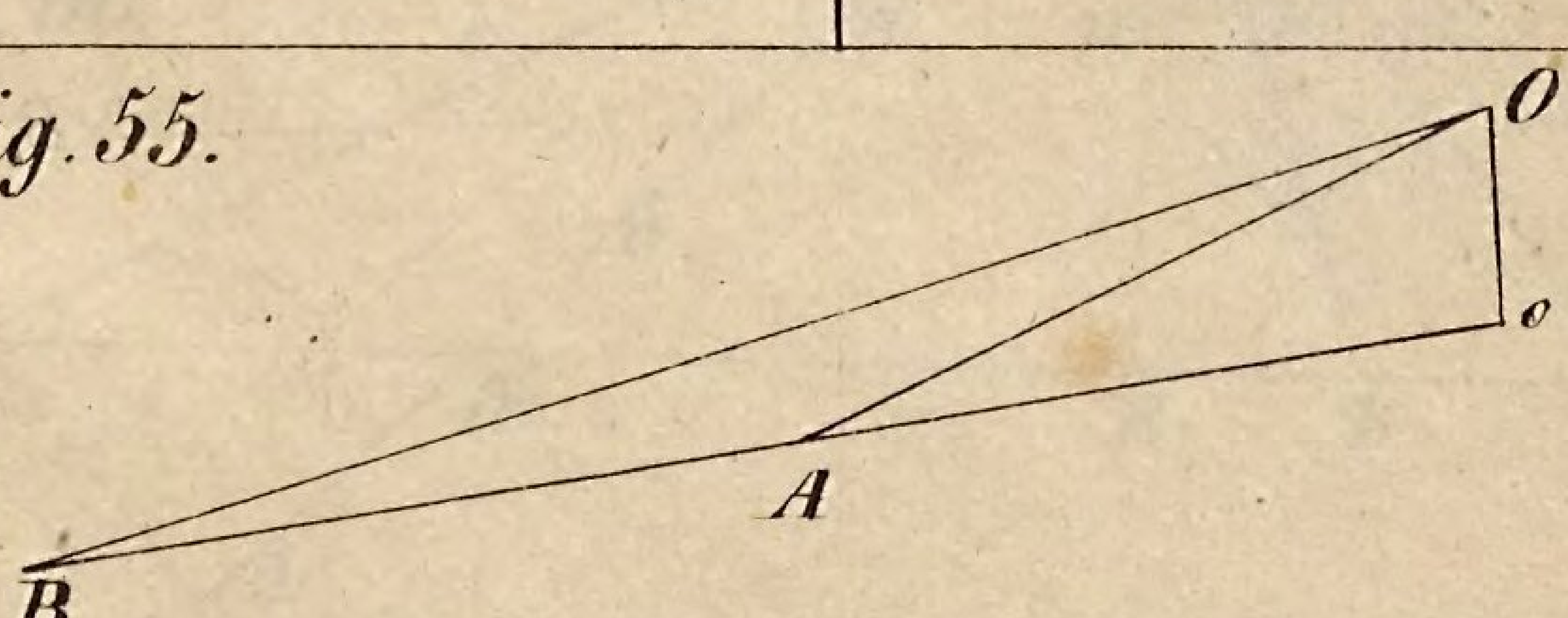


Fig. 56.

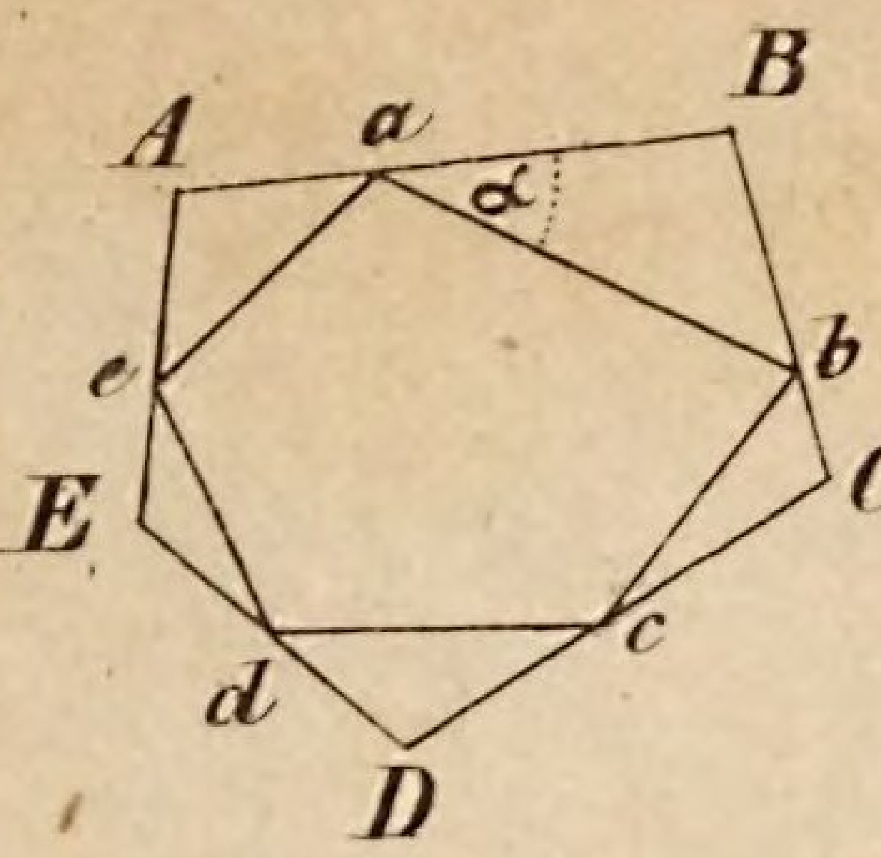


Fig. 57.

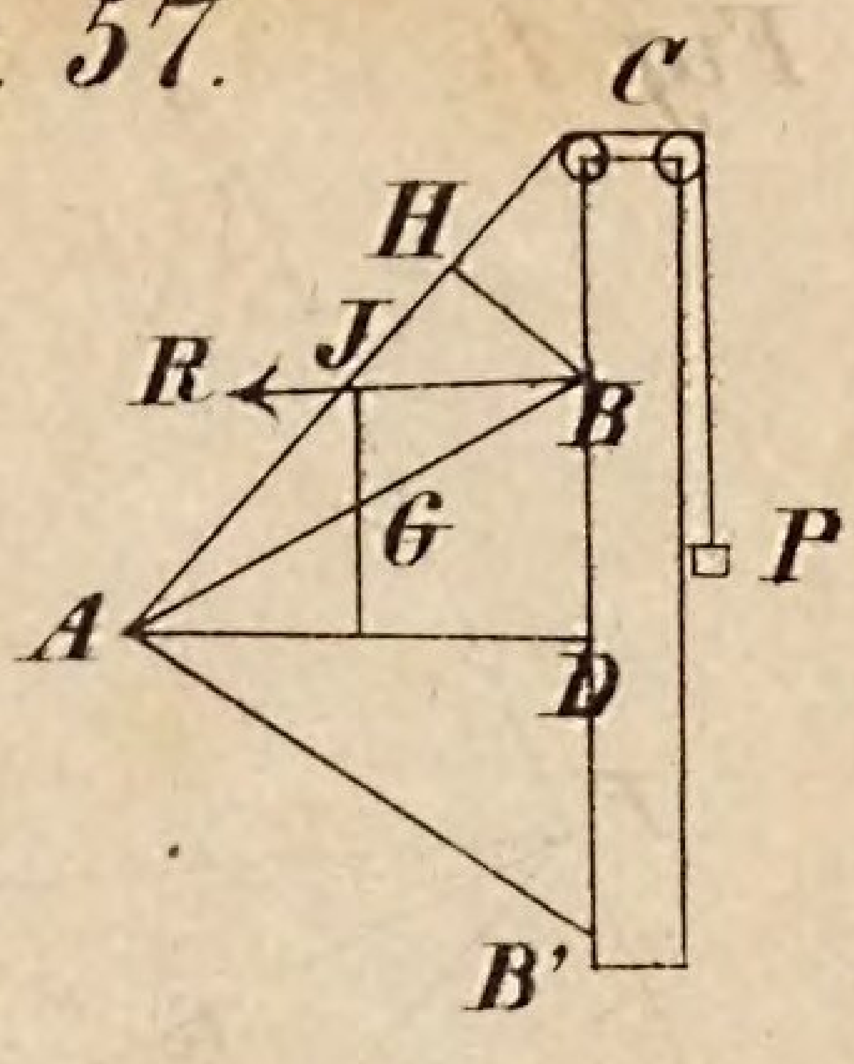


Fig. 58.

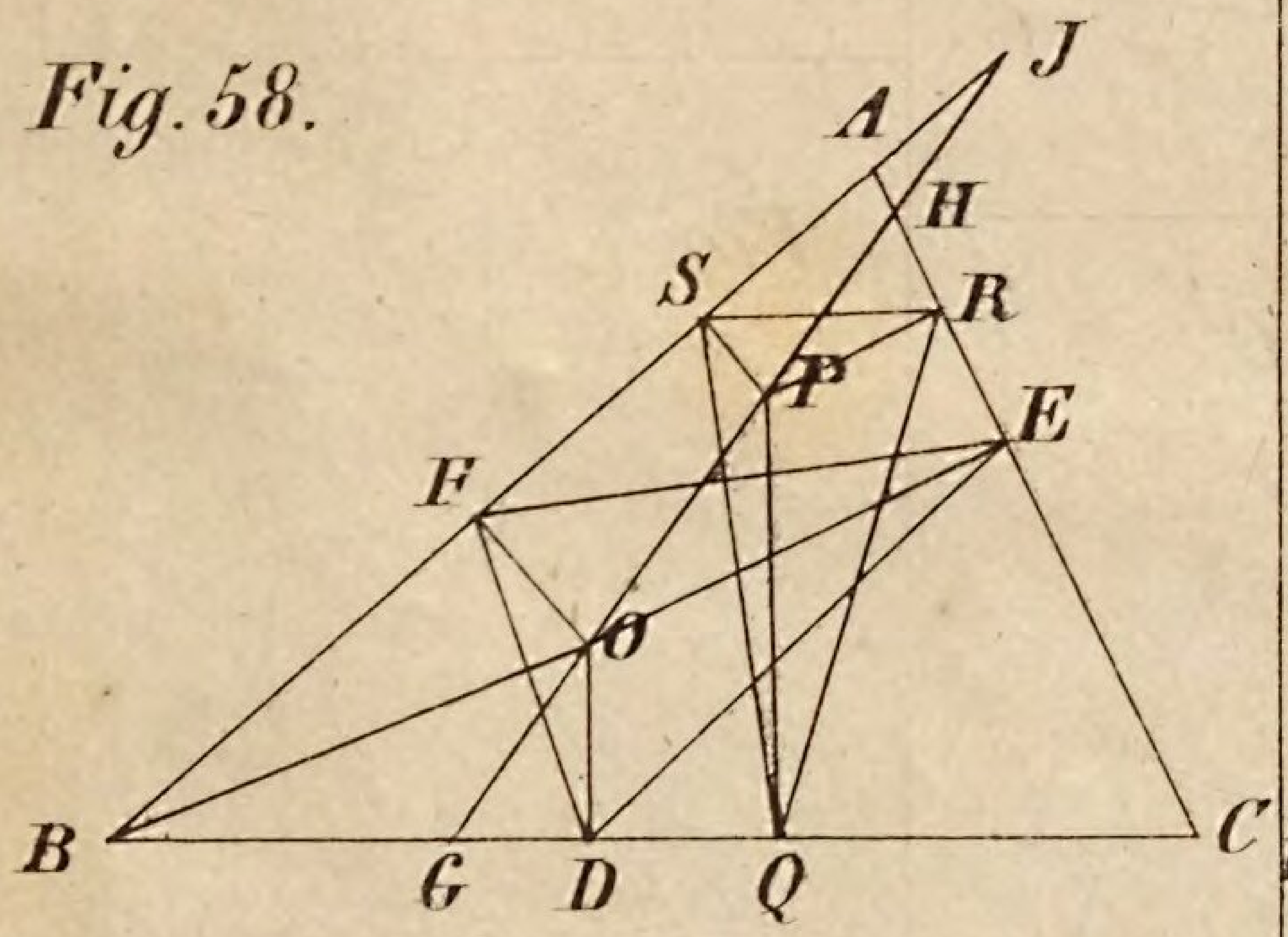


Fig. 61.

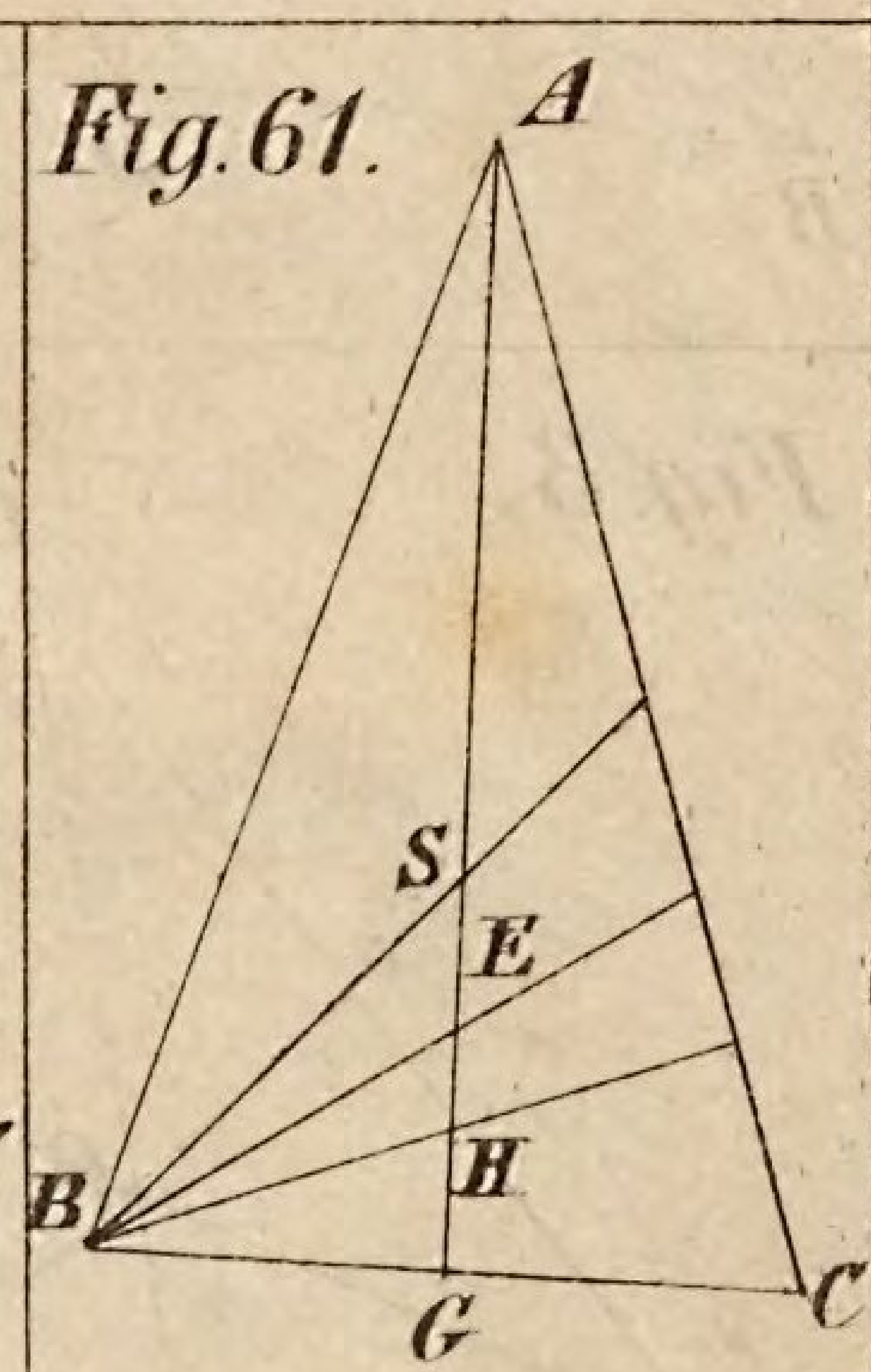


Fig. 59.

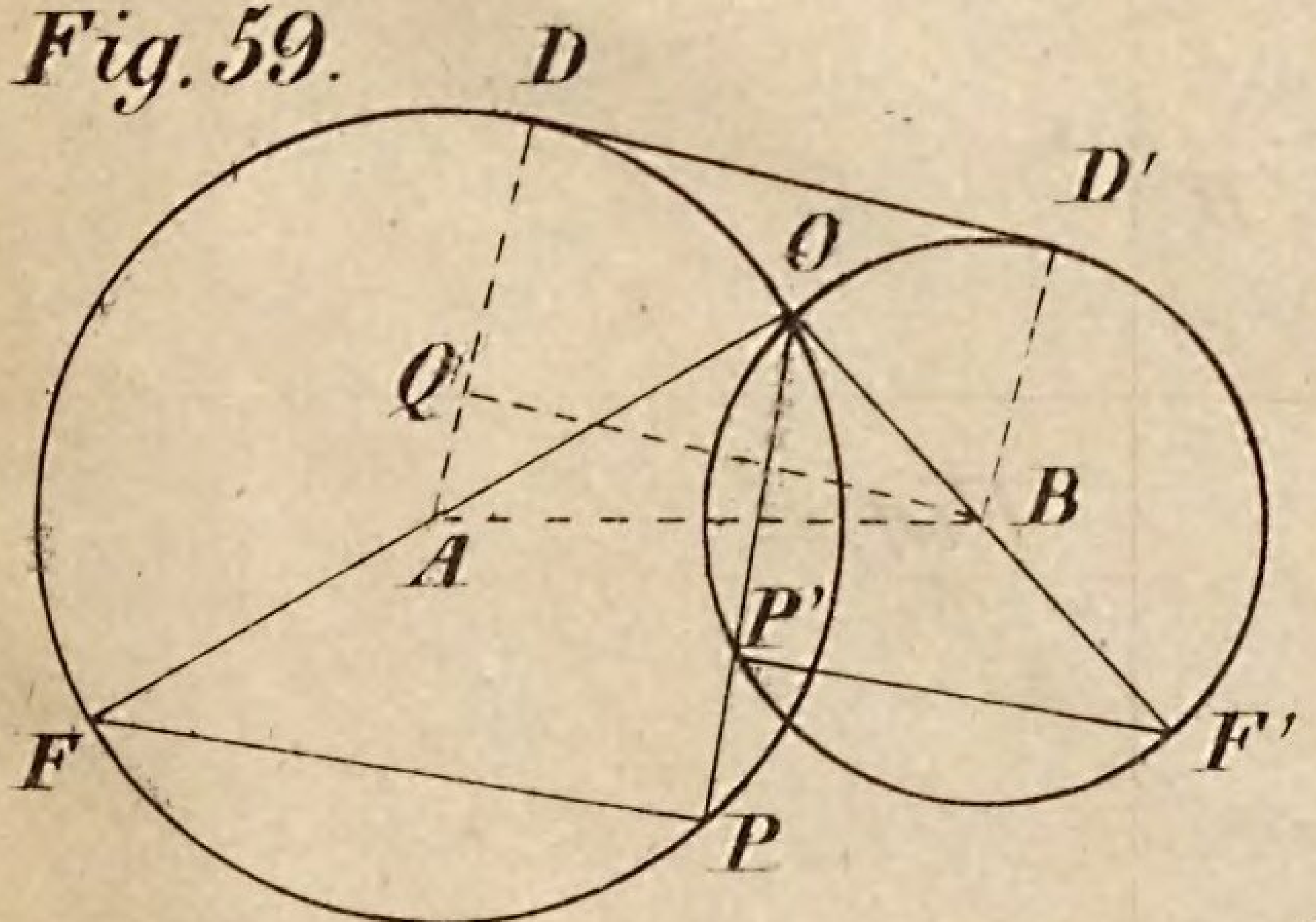
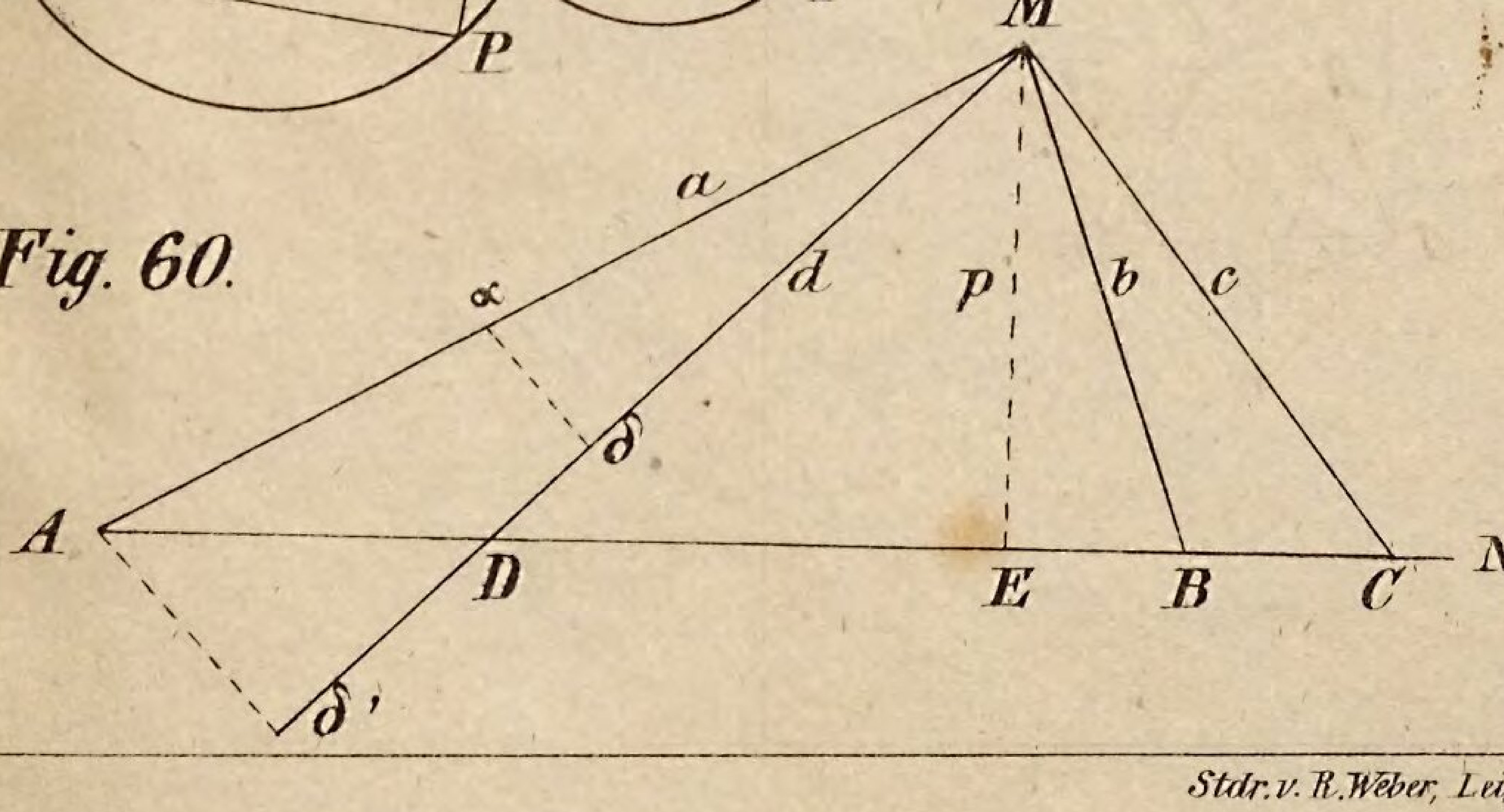


Fig. 60.



Stdr. v. R. Weber, Leipzig.